ADRIAN MIROIU

INTRODUCERE ÎN LOGICA FILOSOFICĂ

VOLUMUL I

LOGICĂ ŞI FORMALIZARE

Editura Universităţii Bucureşti,
1994

CUPRINS

Notă asupra volumului 5
Introducere 7
§ 0.1. Ce este logica? 7
§ 0.2 Ce este logica filosofică? 17

PARTEA I. LOGICA PROPOZIȚIILOR
Capitolul I. **Metateoria logicii propozițiilor** 23
§ 1. Conective logice 23
§ 2. Limbajul formal al logicii propozițiilor 30
§ 3. Validitate și tautologie 32
§ 4. Consecință și deducție 36
§ 5. Teorema de compactitate 46
§ 6. Exerciții 55
Capitolul II. **Propoziții și judecăți** 60
§ 7. Propozițiile ca purtători ai adevărului 60
§ 8. Conceptul de judecată 65

PARTEA A II-A. LOGICA DE ORDINUL ÎNTÂI A PREDICATELOR
Capitolul III **Metateoria logicii de ordinul întâi a predicatelor** 83
§ 9. Limbaje și modele 83
§ 10. Formalizarea limbajelor de ordinul întâi 89
§ 11. Noțiunea de satisfacere 94
§ 12. Teorii de ordinul întâi 106
§ 13. Teoremele de completitudine și compactitate 111
§ 14. Teoremele Löwenheim–Skolem 128
§ 15. Teoremele de interpolare și definibilitate 130
§ 16. Caracterizarea logicii de ordinul întâi a predicatelor 138
§ 17. Exerciții 150
Capitolul IV. **Cuantificare și formalizare** 154
§ 18. Propozițiile categorice 156
§ 19. Cuantificarea restrânsă și logicile multisortate 162
§ 20. Descripțiile 169
§ 21. Existența 180
§ 22. Exerciții 195
Bibliografie selectivă 200

INTRODUCERE

§ 0.1. Ce este logica?

Se zice adesea că logica este ştiinţa raţionamentelor. Cu ajutorul ei, dintre toate raţionamentele posibile, le alegem pe cele *valide*. Dar, ce face ca un raţionament (sau, cum se mai zice: un argument) să fie valid?

Un raţionament este un şir de propoziţii; ultima dintre ele e numită *concluzie*, iar celelalte *premise*. De multe ori, un raţionament se întâmplă să cuprindă subraţionamente, în care, din anumite premise, se trag concluzii: aceste concluzii intermediare servesc apoi drept premise în alte subraţionamente ori în raţionamentul principal. Dar, pentru moment, să lăsăm la o parte această complicare.

Între premisele şi concluzia unui raţionament noi afirmăm că există o anumită legătură; şi anume, spunem că, în cazul când raţionamentul este valid, avem:

(0.1) *Dacă* premisele sale sunt adevărate, *atunci* şi concluzia va fi adevărată.

Să luăm câteva exemple de raţionamente valide:

(0.2.1) Sau Steaua sau Dinamo va câştiga campionatul de fotbal anul acesta.
Steaua nu va câştiga campionatul de fotbal anul acesta.

Dinamo va câştiga campionatul de fotbal anul acesta.

(0.2.2) Toţi peştii sunt mamifere.
Toţi delfinii sunt peşti.

Toţi delfinii sunt mamifere.

(0.2.3) Vasile este om de afaceri.
Vasile este om inteligent.

Unii oameni de afaceri sunt inteligenţi.

Primul dintre aceste trei raţionamente este evident valid; la fel şi al treilea. Observăm, mai mult, că pentru a admite că ele sunt valide, nici nu trebuie să presupunem cunoştinţe suplimentare despre persoanele sau echipele de fotbal de care este vorba: s-ar putea să nu ştim nimic despre Vasile, cu excepţia

faptului că cele două propoziţii despre el sunt adevărate; tot aşa, cineva ar putea să admită că primul raţionament este valid chiar dacă, până atunci, nu auzise de Steaua şi de Dinamo. Această situaţie indică ceva foarte important: pentru a admite că un raţionament este valid, nu este nevoie să cunoaştem efectiv valorile de adevăr ale premiselor şi concluziei. Aşa cum se arată în (0.1), tot ce e nevoie să ştim este că *dacă* premisele sunt adevărate, *atunci* la fel va fi şi concluzia; or, astfel nu se spune nimic despre felul în care *realmente* sunt premisele şi concluzia.

Dacă s-ar fi cerut ca într-un raţionament valid premisele să fie neapărat adevărate, atunci desigur că raţionamentul (0.2.2) ar fi trebuit să fie considerat invalid, căci premisele lui sunt evident false. Dar el este valid, şi anume pentru că şi în cazul lui este adevărat că: dacă premisele sale ar fi fost adevărate, atunci şi concluzia ar fi fost neapărat adevărată. Dacă deci am fi acceptat premisele, ar fi fost imposibil, în acelaşi timp, să respingem concluzia.

Vom conchide că validitatea sau invaliditatea unui raţionament nu depinde de valorile de adevăr pe care se întâmplă să le aibă propoziţiile pe care le cuprinde acesta. În al doilea rând, să observăm că validitatea sau invaliditatea lui nu depind nici de faptul că în acele propoziţii se spune ceva determinat despre anume persoane, obiecte ori echipe de fotbal. Cel de-al doilea raţionament nu îl vizează de fapt deloc pe Vasile ca persoană; că e aşa se poate vedea dacă înlocuim numele „Vasile" cu numele „Ion" în (0.2.3). Obţinem:

(0.2.4) Ion este om de afaceri.
Ion este om inteligent.

Unii oameni de afaceri sunt inteligenţi.

Ca şi (0.2.3), raţionamentul (0.2.3) este valid. Validitatea lui nu depinde de faptul că s-a întâmplat să afirmăm ceva despre o anumită persoană; mai degrabă, validitatea lui depinde de ceea ce are în comun cu (0.2.3).

În amândouă aceste raţionamente, în fiecare premisă, se afirmă că un anume obiect are o anume proprietate, iar în concluzie se afirmă că unele obiecte care au prima proprietate o au şi pe a doua. Vom spune că cele două raţionamente au în comun următoarea *schemă de raţionament:*

(0.3.1) *a* este *P*
a este *Q*

Unii *P* sunt *Q*

Aici literele *P* şi *Q* stau pentru expresii care referă la proprietăţi, iar *a* stă pentru o expresie care referă la un obiect. De pildă, *P* poate sta pentru expresia „om de afaceri"; această expresie *referă* la proprietatea diferitelor persoane de a fi oameni de afaceri. Apoi, *a* poate sta pentru, să zicem, numele „Ion"; acest nume *referă* la omul Ion. Să mai observăm următorul lucru: expresiile

„om de afaceri", „inteligent", „Ion", „Vasile" sunt expresii ale limbii române; raţionamentele (0.2.3) şi (0.2.4) au fost formulate în această limbă. Aceste expresii *referă* la diverse entităţi – unele la persoane, altele la proprietăţi ale acestora etc. Dar literele *P*, *Q*, *a* nu sunt cuvinte ori expresii ale limbii române; de aceea, nu putem să spunem că şi ele referă la anumite entităţi. Putem să zicem însă altceva: că ele stau în locul expresiilor din limba română; le folosim pentru diverse scopuri (de pildă, pentru a arăta care este schema de raţionament pe care o au în comun mai multe raţionamente), iar când e nevoie să trecem la afirmaţii despre raţionamente concrete, indicăm precis care sunt expresiile pentru care stau aceste litere. Expresiile ce apar într-o schemă în raţionament nu sunt de aceea propoziţii, ci *scheme propoziţionale*. De exemplu, „*a* este *P*" nu e o propoziţie: ea nu e nici adevărată şi nici falsă. Dar ea stă pentru, să zicem (în cazul în care luăm pe *a* ca stând pentru „Ion", iar pe *P* ca stând pentru „om de afaceri"): „Ion este om de afaceri"; despre această propoziţie ne putem întreba acum dacă e adevărată ori falsă.

Într-o schemă de raţionament precum (0.3.1), literele *a*, *P*, *Q* am văzut că pot sta pentru diverse expresii. Iar în urma oricărei înlocuiri a lor cu expresii corespunzătoare va rezulta un raţionament valid, precum (0.2.3) ori (0.2.4). Prin urmare, faptul că toate aceste raţionamente sunt valide nu depind de înţelesul acestor expresii particulare. Dar expresiile „este", „sunt', „unii" nu se înlocuiesc; ele sunt păstrate constante. Validitatea raţionamentelor de forma lui (0.2.2) ori (0.2.4) va depinde (între alte lucruri), de înţelesul acestor expresii.

Să luăm acum raţionamentul (0.2.1). E limpede că, şi în cazul lui, faptul că îl acceptăm ca valid nu depinde de înţelesul expresiilor „Steaua", „Dinamo" ori „va câştiga campionatul de fotbal anul acesta". Că e aşa se vede dacă vom considera următorul raţionament:

(0.2.5) Sau Italia sau Croaţia va câştiga compionatul european de baschet de anul viitor.

Croaţia nu va câştiga campionatul european de baschet de anul viitor.

Italia va câştiga campionatul european de baschet de anul viitor.

Cele două raţionamente au în comun următoarea schemă:

(0.3.2.) *A* sau *B*.

Nu–*A*

B

Literele *A* şi *B* stau pentru propoziţii oarecare: înlocuindu-le cu propoziţii (ale limbii române, de pildă), obţinem raţionamente efective. Validitatea raţionamentelor noastre (0.2.1.) şi (0.2.5.) nu depinde de conţinutul propoziţiilor pentru care stau *A* şi *B*, ci (între altele) de înţelesul expresiilor „sau" şi „nu".

Vom spune că o astfel de schemă de raţionament este validă dacă orice substituire a literelor ce apar în ea cu propoziţii (sau, precum în cazul schemei (0.3.1), orice substituire a literelor cu expresii precum „om de afaceri", „Ion" etc.) dă naştere unui raţionament valid; invers, o schemă de raţionament este invalidă dacă prin substituire se obţine uneori un raţionament cu premise adevărate, iar concluzia falsă. Dacă un raţionament este valid şi, în plus, premisele sale sunt adevărate, vom spune că el este *corect.* Un raţionament valid este *incorect* dacă cel puţin una dintre premisele lui este falsă.

1. *Natura logicii.* Afirmaţia, pe care am menţionat-o mai devreme, că logica este ştiinţa raţionamentelor, este imprecisă. În primul rând, pentru că nu este menţionat explicit faptul că investigaţia logică urmăreşte să selecteze raţionamentele valide din clasa tuturor raţionamentelor posibile. Mai corect ar trebui, deci, să zicem că logica este ştiinţa raţionamentelor valide. În al doilea rând, în cercetarea validităţii raţionamentelor, logica ţine cont de expresii precum „este", „unii", „nu", „sau" – care sunt numite *constante logice.* Am văzut că validitatea unui raţionament depinde de proprietăţile expresiilor de acest tip care apar în el. În acest sens, logica este studiul teoretic al constantelor logice. În al treilea rând, va trebui să se precizeze ce se înţelege printr-un raţionament *valid.* În al patrulea rând, fiecare raţionament este formulat într-un anumit limbaj. Uneori, propoziţiile din limba naturală au o formă gramaticală care ne poate înşela. Să luăm, de pildă, propoziţia:

(0.4.1.) Omul este singura fiinţă care amână.

Aparent, în această propoziţie se afirmă că omul posedă proprietatea de a fi o fiinţă care amână şi, în plus, că el e singura fiinţă de acest gen. Dar, desigur că atunci când afirmăm acest lucru, nu vrem să afirmăm ceva despre o anume fiinţă numită „omul", fie ea concretă ori abstractă; noi vrem să spunem ceva despre oameni, că numai ei au proprietatea de a amâna. Propoziţia noastră spune deci:

(0.4.2.) Oamenii sunt singurele fiinţe care amână.

De data aceasta, se afirmă nu că omul are o proprietate, ci că *fiecare* om o are. Dar, dacă privim cu şi mai multă atenţie, vedem că în (0.4.2) subiectul despre care realmente se afirmă ceva nu este exprimat prin „oamenii". Gramatical aşa s-ar părea, însă sensul propoziţiei noastre e altul: acela că nu vom putea găsi o fiinţă care nu e om şi care, în acelaşi timp, amână. Prin, urmare, că

(0.4.3) Toate fiinţele care amână sunt oameni.

În (0.4.3) subiectul este expresia „fiinţele care amână"; prin această propoziţie se afirmă că toate aceste fiinţe au proprietatea de a fi oameni. Aşadar, înţelesul unei propoziţii poate fi foarte diferit de cel pe care îl indică, aparent, gramatica.

Exemplul acesta sugerează că cercetarea logică este strâns legată de cercetarea caracteristicilor limbajelor în care sunt formulate raţionamentele noastre. Pe această cale, logica devine interesantă pentru lingvistică, fiindcă logicianul, interesat de înţelesul constantelor logice, încearcă să ofere o abordare precisă a felului în care acestea funcţionează în cadrul propoziţiilor noastre, în particular a felului în care înţelesul lor contribuie la înţelesul acestor propoziţii.

Cel de-al cincilea (şi cel mai important) sens în care afirmaţia că logica e ştiinţa raţionamentelor nu e de natură să ne mulţumească este următorul. Ea lasă fără răspuns precis întrebarea: în ce direcţie trebuie să-şi îndrepte logicianul eforturile?

S-ar putea formula cel puţin trei răspunsuri la această întrebare:

a) *Abordarea locală.* Potrivit acestei strategii, scopul logicianului este de a construi o colecţie cât mai cuprinzătoare de raţionamente (sau de scheme de raţionament) valide. În cercetările sale, el urmăreşte să descopere noi raţionamente sau scheme de raţionament. Aristotel a arătat care sunt inferenţele imediate valide şi a descoperit silogismele valide din cele trei figuri: logicienii ce au lucrat în tradiţia aristotelică au îmbogăţit acest inventar cu, de pildă, inferenţele care privesc termenii negativi sau cu silogismele din figura a patra, nearistotelică. Apoi, în secolul trecut, unii logicieni (precum Boole, De Morgan, Frege etc.) au adăugat raţionamentele propoziţionale; în sfârşit, Frege şi urmaşii săi au dezvoltat logica predicatelor, o teorie în care s-a creat câmp larg descoperirii unor noi şi noi raţionamente (sau scheme de raţionament) valide. Probabil că, în această strategie, ultimul rezultat important a fost cel obţinut în anii '50 de W. Craig (teorema ce îi poartă numele).

b) *Abordarea sistemică.* Potrivit strategiei locale de investigare logică, se admite că există ceva de genul unei logici universale, care caracterizează *toate* raţionamentele valide posibile. În practică însă, adică în cercetarea raţionamentelor pe care le facem atunci când studiem un domeniu particular de obiecte, se iau în considerare numai anumite clase de raţionamente. Această clasă depinde de genurile de expresii pe care le cuprinde limbajul în care vorbim despre acel domeniu de obiecte.

Atari clase de raţionamente valide se numesc *sisteme logice.* Astfel, *silogistica aritotelică* (a se vedea § 18), primul sistem logic apărut în istoria acestei discipline, priveşte raţionamentele (şi schemele de raţionament) a căror validitate depinde de înţelesurile expresiilor de felul „toţi", „unii", „nici unul", „nu", „este". Singurele propoziţiile avute în vedere sunt cele numite *categorice:* în cadrul lor se afirmă (sau se neagă) un predicat *P* despre un subiect *S*; ele au deci forma *S–P*, de pildă „Toţi *S* sunt *P*" sau „Unii *S* nu sunt *P*". Orice altceva care ar putea afecta validitatea raţionamentelor nu este luat în seamă.

De pildă, raţionamentul (0.2.2) este formulat în silogistică. *Logica propoziţiilor* (a se vedea capitolele I şi II mai jos) este un alt sistem logic; ea priveşte raţionamentele (şi schemele de raţionament) a căror validitate depinde de înţelesurile unor expresii precum „sau", „dacă...atunci", „nu", „şi", „dacă şi numai dacă". Nimic altceva nu afectează validitatea raţionamentelor cercetate în acest cadru; propoziţiile sunt considerate ca întreg şi nu contează structura lor internă. Raţionamentele (0.2.1) şi 0.2.5), schema de raţionament (0.3.2) sunt valide în acest sistem logic. *Logica predicatelor* (pe care o vom studia în partea a doua a acestei lucrări) înglobează logica propoziţiilor şi, în plus cercetează acele raţionamente şi schema de raţionament care cuprind cuantificatori, precum „toţi", „unii". Bunăoară, raţionamentele (0.2.3) şi (0.2.4), ca şi schema ca raţionament (0.3.1) sunt studiate în acest sistem logic.

Conform strategiei sistemice, logicianul este interesat, în primul rând, de găsirea tuturor raţionamentelor şi schemelor de raţionament care sunt cuprinse într-un sistem logic; el va putea admite că un anume raţionament, să zicem, este cuprins într-un sistem logic şi nu poate fi dovedit ca valid într-altul. De pildă, în logica propoziţiilor un raţionament precum (0.2.2) nu este valid, deşi este valid în silogistică.

Strategia sistemică poate fi dusă chiar mai departe: cum ce se urmăreşte este să se construiască un anumit sistem logic, nimic nu împiedică posibilitatea ca într-un sistem logic un raţionament să fie valid, iar într-altul nu numai că el nu poate fi dovedit ca valid, dar – mai mult – el poate fi dovedit ca invalid. În logica propoziţiilor se poate demonstra principiul aşa-numit al terţului exclus:

(0.4) Orice propoziţie este sau adevărată sau falsă, a treia posibilitate este exclusă.

Unii logicieni s-au îndoit însă de valibilitatea acestui principiu. Ei au considerat că, în unele contexte, el nu funcţionează şi nu trebuie să admitem că propoziţiile nu sunt adevărat şi nici false. De exemplu, logicianul polonez J. Lukasiewicz a argumentat că propoziţiile despre viitor nu sunt nici adevărate, nici false şi au o a treia valoare de adevăr: sunt posibile. Principiul (0.4) este respins în sistemul logic pe care îl dezvoltă el (aşa-numita logică trivalentă).

Mergând pe acest drum, logicianul devine relativist: el nu mai consideră că există o logică unică, universală, ce ar cuprinde toate raţionamentele posibile, despre orice obiecte posibile (cf. şi § 16 mai jos). El admite însă că, în scopuri practice diferite, sunt relevante şi trebuie folosite sisteme logice diferite. De aceea, scopul său e acela de a caracteriza cât de atent aceste sisteme. Acum însă el nu se mai apleacă asupra raţionamentelor individuale; activitatea care

îi atrage cel mai mult atenţia nu e aceea de a dovedi că un anume raţionament este valid (adică se cuprinde într-un anumit sistem logic). El e interesat de ceva mai important: de proprietăţile generale ale *colecţiei* tuturor raţionamentelor cuprinse într-un anumit sistem logic. Acum răsar întrebări de felul: Sunt reciproc compatibile raţionamentele admise ca valide într-un sistem logic? (altfel zis: este necontradictoriu acel sistem logic?) Se poate găsi o mulţime de raţionamente din care să putem deduce toate raţionamentele valide într-un sistem logic, şi numai pe ele? (astfel zis: este axiomatizabil acel sistem logic?) Există proprietăţi structurale ale tuturor raţionamentelor valide într-un sistem logic, independent de forma lor particulară? De pildă, în logica predicatelor se poate demonstra următorul lucru: să presupunem că Γ este o mulţime de propoziţii. Vom spune că o propoziţie φ este (într-un sistem logic anumit) consecinţa unei mulţimi Γ de propoziţii adică există un raţionament valid (în acel sistem logic) ale cărui premise sunt propoziţii din Γ, iar concluzia φ. Mai departe, vom spune că Γ este necontradictorie dacă Γ nu are drept consecinţe două propoziţii contradictorii între ele, de exemplu φ şi $-\varphi$. În logica predicatelor se poate demonstra că o mulţime Γ de propoziţii este necontradictorie dacă şi numai dacă orice submulţime finită a lui Γ este necontradictorie. Această proprietate poartă numele de teorema de compactitate.

Cu privire la diverse sisteme logice, pot fi demonstrate diverse teoreme de acest fel. Cum ele caracterizează proprietăţi ale colecţiei raţionamentelor cuprinse într-un anumit sistem logic, vom spune că ele exprimă *proprietăţi structurale* ale acelor sisteme logice. De pildă, şi în logica propoziţiilor se demonstrează teorema de compactitate; dar în anumite sisteme de logică a predicatelor această teoremă nu mai este valabilă.

Strategia sistemică de investigaţie logică va fi urmărită cu precădere pe parcursul acestei lucrări. În principal în capitolele I şi III vor fi demonstrate proprietăţile structurale ale logicii propoziţiilor şi logicii de ordinul întâi a predicatelor – cele mai importante şi mai bine cunoscute sisteme logice.

c) *Abordarea structurală.* O a treia strategie de a înţelege logica porneşte de la existenţa proprietăţilor structurale ale sistemelor logice. Ea s-a dezvoltat relativ recent (primul rezultat remarcabil în această privinţă a fost obţinut în anii '60 de către logicianul P. Lindström) şi este, astăzi, în plină expansiune. Cum am văzut, colecţiile de raţionamente valide (deci sistemele logice) sunt caracterizate prin anumite proprietăţi structurale; unele colecţii satisfac o sumă de astfel de proprietăţi; alte colecţii satisfac o altă sumă de astfel de proprietăţi. Întrebarea pe care ne-o putem e dacă nu cumva, invers, e posibil ca o anumită colecţie de proprietăţi structurale să se potrivească unui singur sistem logic. Sensul acestei întrebări este următorul: potrivit strategiei sistemice, un sistem

formal era caracterizat prin conţinutul său – colecţia tuturor raţionamentelor pe care le admite ca valide; existenţa unor proprietăţi structurale ale unui sistem logic era considerată, mai curând, ca derivată din conţinutul acesteia. Dar, potrivit strategiei structurale, se încearcă parcurgerea drumului în sens contrar: plecând de la o colecţie de proprietăţi structurale să se determine ce sisteme logice (ce colecţii de raţionamente) le satisfac. Interesant este faptul că, uneori se pot afla condiţii de unicitate: unei anumite colecţii de atari proprietăţi structurale îi corespunde un şi numai un sistem logic. De pildă, P. Lindström a construit o mulţime de proprietăţi structurale care sunt împlinite de mai multe sisteme logice, dintre care *cea mai tare* este logica de ordinul întâi a predicatelor (cf. § 16 în capitolul III mai jos).

Se observă că obiectul de studiu al logicianului nu este acelaşi în fiecare din cele trei strategii de investigaţie logică: în primul caz, el caută să construiască raţionamente (şi scheme de raţionamente) valide; în cel de-al doilea, interesul său era acela de a edifica sisteme logice – colecţii de raţionament valide; în sfârşit, cel ce lucrează ghidându-se de a treia strategie cercetează proprietăţile sistemelor logice, astfel zis colecţii de sisteme logice.

2. *Constantele logice.* Menţionam mai devreme faptul că validitatea unui raţionament nu depinde de înţelesul tuturor expresiilor ce apar în premisele şi în concluzia acestuia, ci numai de înţelesul *constantelor logice*, expresii precum „un", „şi", „sau", „dacă... atunci", „toţi", „unii" etc.; am menţionat, de asemenea, că nu orice sistem logic face apel la toate constantele logice.

Astfel, logica propoziţiilor se construieşte cu ajutorul unei subclase de constante logice – cea a *conectivelor logice* (cf. capitolul I mai jos). Întrebarea care se ridică în chip natural e următoarea: ce este o constantă logică?

Într-un raţionament precum, să zicem (0.2.3) expresii ca „peşte", „mamifer", „delfin" am văzut că nu joacă un rol esenţial. Am putea să le înlocuim cu alte expresii care referă la alte proprietăţi, obţinând tot un raţionament valid; bunăoară, punând în locul lor expresiile „mamifer", respectiv „vertebrat" şi „om", obţinem raţionamentul:

(0.2.6) Toate mamiferele sunt vertebrate.
Toţi oamenii sunt mamifere.
Toţi oamenii sunt vertebrate.

care, şi el, este valid. Validitatea nu depinde de acele expresii descriptive, ci de tipul raporturilor vizate între subiectul şi predicatul fiecărei propoziţii, deci de înţelesul expresiilor „toţi" şi „sunt". Raţionamentele (0.2.2) şi (0.2.6) sunt exprimate prin aceeaşi schemă de raţionament:

(0.3.3) Toţi P sunt Q
Toţi R sunt P
Toţi R sunt Q.

Vom spune că într-un sistem logic o expresie este constantă logică dacă ea are un rol în determinarea validităţii raţionamentelor în acel sistem logic. Criteriul după care putem determina acest rol este faptul că acea expresie apare în *schemele de raţionamente* cercetate în acel sistem logic. Constantele logice nu au un înţeles descriptiv: înţelesul lor este determinat în întregime de rolul jucat în cadrul raţionamentelor.

Potrivit acestei modalităţi de a înţelege constantele logice, clasa acestor expresii nu este determinată a priori şi nimic nu ne forţează să considerăm că o anumită expresie este sau nu este constantă logică. În diferite sisteme logice, expresii diferite pot conta drept constante logice, iar ceea ce pare descriptiv într-un sistem logic va putea fi considerat ca având înţeles logic într-alt sistem logic. Nu putem deci să trasăm, o dată pentru totdeauna, un hotar precis între expresii descriptive şi logice; hotarul se poate muta uneori. Prin urmare, faptul că o expresie este sau nu constantă logică ţine de rolul, de funcţia ei, într-un sistem logic (în particular, de împrejurarea că ea determină structural conceptul de validitate în acel sistem logic), iar nu de vreo caracteristică *inerentă*, naturală a ei; a fi constantă logică e o funcţie, şi nici o expresie nu se naşte cu ea, iar dacă este aleasă să o împlinească, nu îi e sortit să o poarte până la moarte. (În § 16 această chestiune va fi reluată, de acea dată cu ajutorul unor exemple, sper, convingătoare).

Expresii precum „toţi", „unii", „nu", „dacă...atunci", „şi", „sau", „dacă şi numai dacă" etc. sunt tratate în mod standard drept constante logice; altfel zis, sistemele logice cele mai bine elaborate şi mai cunoscute – silogistica, logica propoziţiilor, logica de ordinul întâi a predicatelor – apelează la unele din ele şi numai la ele.

În ultimele decenii, în special, au fost construite însă şi alte sisteme logice în care apar şi alte constante logice. În § 16 vor fi menţionate câteva, precum cuantificatorul „există infinit de multe obiecte încât..."; în unele sisteme logice încearcă să se formalizeze negaţia, conjuncţia, implicaţia, cuantificatorii ce apar în limba naturală.

Unii logicieni au dezvoltat sisteme logice (*modale*) în care apar drept constante logice expresii precum „este posibil" ori „este necesar"; alţii au luat drept constante logice expresii precum „eu cred că" ori „eu ştiu că", dezvoltând sisteme de logică *epistemică*; alţii s-au aplecat asupra expresiilor „este obligatoriu", „este permis" şi, tratându-le drept constante logice, au elaborat diverse sisteme de logică *deontică* etc. Dar, trebuie subliniat, validitatea unui raţionament într-un sistem logic nu depinde de înţelesurile tuturor expresiilor ce apar în propoziţiile considerate; aceasta ar fi un nonsens. Însă, care sunt expresiile descriptive şi care sunt constantele logice care apar într-un raţionament – aceasta

e o problemă care nu are un răspuns prestabilit. Răspunsul depinde de sistemul logic relativ la care ne interesează să determinăm dacă acel raţionament este valid sau nu.

3. *Limbaje formale.* În cursul acestei lucrări vom considera numai raţionamente construite în cadrul unor limbaje formale. (Conceptul de limbaj formal va fi definit riguros în capitolul I şi în capitolul III mai jos). Această opţiune are mai multe temeiuri. Primul constă în împrejurarea că determinarea clasei raţionamentelor valide într-un sistem logic face apel la schemele de raţionament; pentru a le formula, noi nu ne folosim însă de expresii ale limbii naturale; aşa cum, de pildă, raţionamentele (0.2.2) şi (0.2.6) sunt şiruri de propoziţii într-o limbă naturală (limba română), tot aşa schema de raţionament (0.3.3) poate fi considerată ca un şir de expresii ale unui limbaj formal (cel al silogisticii aristotelice). Atunci când cercetează dacă un raţionament e valid (potrivit strategiei locale de investigare logică), dacă un raţionament se cuprinde sau nu într-un anumit sistem logic (când adoptă strategia sistemică de investigare logică) sau dacă o sumă de raţionamente satisface o colecţie de proprietăţi structurale (când, în sfârşit, se ghidează după strategia structurală), obiectul prim al logicianului este o schemă de raţionament sau o colecţie de scheme de raţionament. De aceea, cercetarea întreprinsă de logician apare, mai degrabă, ca o cercetare a raţionamentelor dintr-un limbaj formal. Într-un limbaj formal expresiile folosite sunt de două feluri: constante logice şi expresii descriptive. Cum, în cazul acestora din urmă, logicianul nu este interesat de înţelesurile lor particulare, ele sunt tratate ca neavând înţelesuri fixate, deci ca *variabile logice* ale acestui limbaj formal.

Un alt temei al opţiunii de a cerceta limbaje formale e acela că ele au câteva avantaje în raport cu limbile naturale. Astfel, în timp ce în limbile naturale unele expresii sunt ambigui şi pot avea interpretări diferite, într-un limbaj formal această situaţie nu apare. Să presupunem, de pildă, că într-un raţionament apare o premisă care, fiind ambiguă, poate fi interpretată în două feluri; s-ar putea, deci, ca raţionamentul să fie valid numai într-una din cele două interpretări ale premisei. Fie, într-adevăr, următorul raţionament:

(0.5) Şomerii şi studenţii căsătoriţi beneficiază de reducere.
Fratele meu este şomer, dar nu beneficiază de reducere.
Fratele meu nu este căsătorit.

Dacă în (0.5) expresia „căsătorit" este luată ca aplicându-se atât şomerilor, cât şi studenţilor, raţionamentul este valid. Dar dacă ea se ia ca aplicându-se numai studenţilor, atunci raţionamentul nu mai e valid.

Limbile naturale au şi alte dezavantaje: de pildă, în cazul lor este greu să se descrie cu precizie ce înseamnă că o expresie compusă este o propoziţie corectă; în schimb, limbajele formale sunt construite precis şi e întotdeauna posibil să decidem când o expresie este corect construită în acest limbaj. Or, adesea este nevoie să putem formula afirmaţii despre toate propoziţiile unui limbaj ori despre toate propoziţiile lui de o anumită formă; însă dacă nu putem spune ce înseamnă că un şir de simboluri este o propoziţie corectă, atari afirmaţii nu mai pot fi făcute. De asemenea, întrucât, în cazul limbajelor formale, avem controlul asupra felului în care sunt produse propoziţiile corecte, se poate evita apariţia paradoxelor semantice, de felul celui al mincinosului – care însă nu au cum să fie blocate în limba naturală.

Desigur, însă, că adesea ne interesează dacă raţionamentele formulate în limba naturală sunt corecte sau nu; pentru aceasta se procedează în felul următor: se „traduce" fiecare propoziţie a raţionamentului într-un limbaj bine ales şi testăm apoi validitatea raţionamentului astfel obţinut. Se poate totuşi ca uneori să nu reuşim: raţionamentul din limba naturală e mult mai complex şi nu îşi află o traducere îndeajuns de fină în limbajul formal pe care l-am ales. În acest caz, strategia noastră de abordare devine mai complexă: trebuie să ne gândim să construim limbaje formale mai sofisticate, în care să putem formaliza un sistem logic mai puternic, în raport cu care să se decidă validitatea (traducerii) raţionamentului nostru.

Aceasta este, astăzi, sarcina poate de căpătâi a logicianului. El îşi şlefuieşte uneltele, construind sisteme logice mai puternice şi mai complexe; şi, nu în ultimul rând, el face apel la colaborarea specialiştilor din alte domenii – în primul rând la filosofii limbajului şi la lingvişti.

§ 0.2. Ce este logica filosofică?

Gândiţi-vă că sunteţi în bucătărie şi vă pregătiţi să faceţi o mâncare. Felul cum va ieşi aceasta depinde de doi factori: de calitatea materialelor pe care le folosiţi, pe de o parte; şi de măiestria în arta culinară pe care o veţi etala, pe de altă parte. Când, în paragraful anterior, am abordat chestiunea privitoare la natura logicii, am avut în vedere doar cel de-al doilea aspect: a interesat ce putem construi cu materialele la îndemână, ce fel, adică, de mâncăruri suntem în stare să facem.

Acum să trecem însă la primul aspect. Pentru a avea o mâncare bună, măiestria bucătarului e foarte importantă; dar nu e singura relevantă. Căci nu avem cum să ocolim problema materialelor pe care el le foloseşte în pregătirea fiecărui fel de mâncare. Să luăm un exemplu, cel mai simplu: cel în care

logicianul încearcă să construiască logica propoziţiilor. Să admitem, mai mult, că avem a face cu un caz elementar: acela în care el caută să determine dacă un anumit raţionament este valid. În întreprinderea sa, logicianul foloseşte (cel puţin) două feluri de materiale: *propoziţiile* care intră în compunerea premiselor şi a concluziei – şi despre care el admite că au anumite caracteristici: au o valoare de adevăr (bunăoară, sunt adevărate sau false) – şi *conectivele logice* care ajută la compunerea premiselor şi a concluziei (şi pe care el le exprimă cu ajutorul unor cuvinte precum „şi", „nu", „sau", dacă ... atunci" etc.).

Problemele pe care şi le pune logicianul sunt de două mari genuri. Mai întâi, el se poate întreba: *Este acel raţionament valid?* Iar pentru a răspunde, el trebuie: 1) să producă (sau să evoce) un concept precis pentru ce înseamnă că un raţionament este valid; şi 2) să determine dacă acest raţionament particular satisface acel concept. În al doilea rând, el se poate întreba: *Ce sunt propoziţiile ce compun aceste raţionamente şi ce proprietăţi au ele?* De pildă:

1) Ce genuri de lucruri sunt propoziţiile precum „Steaua nu va câştiga campionatul de fotbal anul acesta" ori „Ion este un om de afaceri?" Sunt ele pur şi simplu şiruri de cuvinte? Apoi, ce susţine cineva atunci când pronunţă o propoziţie ca, să zicem, „Ion este om de afaceri"? Care sunt acele lucruri despre care noi suntem îndreptăţiţi să susţinem că au o valoare de adevăr?

2) Există valori de adevăr? Iar dacă da, câte? În logica standard a propoziţiilor se presupune că există două valori de adevăr – adevărul şi falsul – şi că orice propoziţie are exact una din aceste valori de adevăr. Dar se întâmplă mereu aşa? Adică, putem zice că o propoziţie are mereu una din aceste valori de adevăr? Şi, mai departe, e sigur că nu există decât două valori de adevăr?

3) Ce sunt conectivele logice la care se apelează în logica propoziţiilor? Ce natură au ele? Trimit ele la ceva din lume, sau nu? Depinde valoarea de adevăr a propoziţiilor compuse cu ajutorul lor numai de valorile de adevăr ale propoziţiilor componente, sau intervin şi alţi factori?

4) În sfârşit, sunt redate în chip satisfăcător în logica propoziţiilor raţionamentele pe care le facem în limba naturală? Sau, altfel zis: reprezintă raţionamentele formulate în diferitele limbaje ale logicii propoziţiilor *formalizări* satisfăcătoare ale raţionamentelor noastre de zi cu zi? De pildă: sunt formalizate corect propoziţiile din limba naturală prin propoziţiile limbajelor formale ale logicii propoziţiilor? Şi, sunt relaţiile din limba naturală reprezentate corect prin conectivele logice ale logicii propoziţiilor? Astfel: este „şi" – conectivul logic numit „conjuncţie" – o replică satisfăcătoare a lui „şi" din limba naturală? (Gândiţi-vă că în logica propoziţiilor o propoziţie ca *p şi q* este echivalentă cu *q şi p;* dar se întâmplă tot aşa şi cu propoziţiile: „Al doilea război mondial a început

în 1939 *şi* s-a sfârşit în 1945", respectiv: „Al doilea război mondial s-a sfârşit în 1945 *şi* a început în 1939"?) Sau: este implicaţia logică o formalizare adecvată a relaţiei „dacă ... atunci" din limba naturală? (În logica propoziţiilor implicaţia: „Dacă luna este făcută din brânză verde, atunci 2 + 2 = 4" e adevărată; dar este ea intuitiv adevărată?)

Probleme precum acestea intră în domeniul preocupărilor de *logică filosofică*. Logica filosofică este într-un fel logică, şi este într-un fel filosofică. Este logică, pentru că studiază raţionamentele, condiţiile care le fac valide; şi este filosofică, pentru că ea reprezintă o investigare de tip filosofic a mijloacelor folosite pentru a construi sistemele logice formale. Exemplele date cred că au reuşit deja să delimiteze obiectul ei de studiu: ideile de adevăr, de înţeles, de referinţă, chestiunea formalizării raţionamentelor din limba naturală (în vederea determinării structurii şi validităţii lor logice) etc.

Logica filosofică nu este reflecţia filosofică asupra logicii; o atare investigaţie e constituită de filosofia logicii. Este adevărat, unii autori consideră că cele două discipline sunt strâns legate, până la identificare: există lucrări zise de „filosofia logicii" care abordează chestiuni cum ar fi, de exemplu, cea a naturii propoziţiilor şi care ţin de fapt de logica filosofică; după cum există lucrări zise de logică filosofică în care sunt cuprinse discuţii despre chestiuni de filosofia logicii, cum ar fi cele privind semnificaţia filosofică a teoremelor de incompletitudine ori a teoremelor lui Löwenheim-Skolem. În aceste din urmă cazuri, reflecţia filosofică priveşte *rezultatele* activităţii logice. Logica filosofică nu vizează însă rezultatele, ci instrumentele folosite pentru a produce acele rezultate; nu ceea ce se obţine prin formalizarea într-un limbaj formal a unei colecţii de raţionamente, ci putinţa şi natura formalizării acelor raţionamente într-un limbaj formal de acel gen. Nu se preocupă de gustul mâncării, ci de natura şi calitatea materialelor folosite pentru a face acea mâncare.

Capitolul IV al acestei lucrări este semnificativ în această privinţă. În el e discutată posibilitatea de a formaliza în logica de ordinul întâi propoziţiile categorice, cele în care vorbim despre mai multe feluri de obiecte, ori cele propoziţiile în care spunem că un obiect individual are o proprietate sau că există. Astfel se nasc întrebări fundamentale ce ţin de domeniul logicii filosofice, precum: cât se păstrează din forma gramaticală a unei propoziţii atunci când o traducem în, de pildă, un limbaj de ordinul întâi? Ce natură au cuantificatorii? (= expresii precum „toţi" ori „unii") Care e natura termenilor singulari? (= a acelor expresii pe care le folosim pentru a vorbi despre obiecte individuale) Este existenţa o proprietate a obiectelor? (Şi, deci, când susţinem că ceva există spunem ceva despre acel obiect?)

Când încercăm să răspundem la aceste întrebări, trebuie să presupunem anumite rezultate logice (şi voi face referire la unele dintre teoremele probate în

capitolul III); preocuparea principală nu e însă acum aceea de a produce noi rezultate logice (în acest scop logicianul cu pregătire matematică este mult mai indicat; filosoful acum şi-a încheiat munca), ci de a scruta posibilitatea de a aplica un sistem logic unor cazuri semnificative. (Desigur însă că astfel nu este de la bun început exclusă posibilitatea de a se obţine rezultate tehnice interesante!) Să observăm, totodată, că acesta a fost unul dintre motivele pentru care am acordat un spaţiu atât de larg (în capitolele I şi III) prezentării metateoriei logicii elementare – a logicii propoziţiilor şi a logicii de ordinul întâi a predicatelor.

De asemenea, e important să remarcăm că discuţii precum cele din capitolul IV ne conduc spre teme filosofice grave, precum ideea de universal, de individ, de existenţă etc. Logica filosofică este filosofie: e o reflecţie conceptuală asupra unor idei precum cele menţionate adineaori. Şi – să accentuăm – nu există constrângeri a priori asupra tipului de reflecţie filosofică cerută în domeniul logicii filosofice. Logica filosofică nu se află în întregime în parohia filosofilor logicii ori matematicii; nu e în parohia filosofilor de orientare analitică, nu e legată de filosofia limbajului mai mult decât, să zicem, de metafizică. Aici nu e presupus un tip de rezultate, ori un tip de unelte. Un singur lucru e cerut: rigoarea conceptuală.

Capitolul I

METATEORIA LOGICII PROPOZIŢIILOR

§ 1. Conective logice

În logica propoziţiilor se folosesc două feluri de simboluri: conective logice şi litere propoziţionale. Conectivele logice cel mai des întrebuinţate sunt negaţia, conjuncţia, disjuncţia, implicaţia, echivalenţa, în simboluri: $-$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Să luăm ca exemplu simbolul $\wedge$ (uneori, pentru conjuncţie vom folosi de asemenea simbolul $\cdot$). Plecând de la două propoziţii φ şi ψ, el permite formarea unei noi propoziţii, $(\varphi \wedge \psi)$. Pentru această nouă propoziţie, e necesar să specificăm anumite proprietăţi care să permită utilizarea ei în contextul logicii propoziţiilor. Ceea ce trebuie cunoscut în acest context este valoarea ei de adevăr. Informaţia necesară în acest sens este dată prin următoarea definiţie:

(1.1) $(\varphi \wedge \psi)$ este adevărată dacă şi numai dacă φ este adevărată şi ψ este adevărată; altminteri, ea este falsă.

În legătură cu definiţia (1.1) trebuie făcute mai multe observaţii: mai întâi, în logică apare foarte des expresia „dacă şi numai dacă"; pentru comoditate, aici şi în cele ce urmează se va folosi prescurtarea „ddacă" În al doilea rând, conţinutul lui (1.1) este adesea redat cu ajutorul unui tabel de adevăr:

(1.2)

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

unde T este o prescurtare pentru adevărat, iar F este o prescurtare pentru fals. Pentru celelalte conective logice – pentru disjuncţie, respectiv implicaţie, echivalenţă şi negaţie ($\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $-$) – se dau, de asemenea, tabelele corespunzătoare:

(1.3)

φ	ψ	$(\varphi \vee \psi)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

φ	ψ	$(\varphi \rightarrow \psi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

φ	ψ	$(\neg \varphi)$
T	T	T
T	F	F

Pentru implicaţie, bunăoară, informaţia conţinută în tabelul ei de adevăr poate fi exprimată cu ajutorul următoarei definiţii de tipul lui (1.1):

(1.4) $(\varphi \rightarrow \psi)$ este adevărată ddacă sau φ este falsă sau cel puţin ψ este adevărată; altminteri, $(\varphi \rightarrow \psi)$ este falsă.

Să mai observăm că, în genere, o propoziţie poate fi adevărată într-o situaţie şi falsă într-alta. De pildă, propoziţia poate conţine expresii precum „aici", „acum", „acesta" care îşi schimbă referinţa în funcţie de situaţie. Propoziţia „Acum este senin" e adevărată dacă e pronunţată în ziua de 26 februarie 1994, dar este falsă atunci când e pronunţată în multe alte zile. Pentru a se evita această dificultate, în logica propoziţională se presupune că atunci când vorbim despre adevărul sau falsul unei propoziţii, o anumită situaţie este fixată.

În definiţia (1.1) apar cuvintele „adevărat" şi „fals". E nevoie de câteva explicaţii privitoare şi la felul în care sunt întrebuinţate acestea în logica propoziţională. O supoziţie fundamentală este aceea că orice propoziţie considerată este fie adevărată fie falsă, dar nu ambele. Desigur, se va putea obiecta că această presupunere nu este corectă; dar ea poate fi menţinută fără dificultate odată ce vom fi de acord să acceptăm numai acele situaţii în care ea este îndeplinită. Pe de altă parte, apare problema înţelesului expresiei „fals". Desigur că despre o propoziţie putem spune în multe feluri că este falsă. Fie, de exemplu, propoziţia: „Directorul a semnat acest act". Putem spune că e falsă sau pentru că directorul, fiind plecat din oraş, nu a semnat actul; sau pentru că, îndoindu-se că actul e întocmit corespunzător din punct de vedere juridic, directorul a refuzat să îl semneze; sau pentru că, funcţia de director fiind vacantă, nu există o persoană care să semneze acel act etc. În logica propoziţională nu se deosebeşte între aceste feluri de a fi falsă ale unei propoziţii. „Este falsă" înseamnă, pur şi simplu, „nu este adevărată".

Începând cu Frege, s-a argumentat de multe ori că atunci când folosim expresiile „adevărat" şi „fals" noi presupunem că există două obiecte – adevărul şi falsul – care sunt numite de propoziţiile adevărate, respectiv false. O propoziţie ca „Zăpada este albă" este un nume pentru adevăr, şi acesta este sensul în care zicem că ea este adevărată; propoziţia „Iarba este albă" este un nume pentru un obiect, falsul, şi în acest sens zicem că ea este falsă. „Fiecare propoziţie enunţată în care ne interesează semnificaţia cuvintelor trebuie să fie concepută drept un nume propriu, şi atunci semnificaţia sa, dacă ea există, va fi adevărul sau falsul. Aceste două obiecte sunt acceptate de toţi cei care judecă în genere, chiar şi de un sceptic"[1]. Problema naturii acestor două obiecte este extrem de importantă; însă pentru logica propoziţiilor ea nu este relevantă. Adevărul şi falsul ar putea la fel de bine să fie mâna mea dreaptă, respectiv mâna mea stângă, sau invers, ori Big Ben, respectiv Statuia Libertăţii, sau invers. De aceea, logicienii iau adevărul, în chip convenţional, ca fiind numărul 1, iar falsul, tot în chip convenţional, ca fiind numărul 0. Alegerea are însă avantaje tehnice; bunăoară – aşa cum se poate vedea imediat cu ajutorul lui (1.2) – valoarea de adevăr a conjuncţiei poate fi calculată înmulţind valorile de adevăr ale celor două propoziţii componente.

Uneori s-a susţinut că propoziţia $(\varphi \wedge \psi)$ înseamnă acelaşi lucru ca şi

(1.5) φ şi ψ

Aici „şi" este o expresie a limbii române, care e folosită în cadrul acesteia pentru a exprima conjuncţia. Desigur că înţelesurile celor două propoziţii sunt foarte apropiate. Dar între ele există şi diferenţe notabile (să ne gândim numai la faptul că în limba română „şi" înseamnă de multe ori: „şi după aceea"). Simbolul $\wedge$ este un simbol al logicii propoziţiilor, nu al unei limbi naturale (româna), iar înţelesul său e precizat în interiorul acesteia.

În sfârşit, expresia (1.1) poate fi luată în sensul că ea furnizează *înţelesul* simbolului $\wedge$. Dacă ar fi aşa, atunci ar trebui ca (1.1) să fixeze un singur înţeles; or, se observă uşor că putem introduce un simbol $\wedge_1$, astfel încât $(\varphi \wedge_1 \psi)$ să însemne acelaşi lucru ca şi propoziţia.

(1.6) $(\varphi \wedge \psi) \wedge$ numărul π este iraţional.

Propoziţia $(\varphi \wedge_1 \psi)$ este adevărată în toate situaţiile în care propoziţia $(\varphi \wedge \psi)$ este adevărată, şi este falsă în toate situaţiile în care propoziţia $(\varphi \wedge \psi)$ este falsă. Însă, evident, cele două propoziţii nu au acelaşi înţeles. Obiecţia, susţinută, între alţii, de Wittgenstein[2], nu se aplică totuşi atunci când ne raportăm la orizontul logicii propoziţiilor. Căci (1.1) – respectiv (1.2) – indică ce trebuie să avem în vedere pentru a determina dacă propoziţia $(\varphi \wedge \psi)$ este adevărată. Să presupunem că cineva ar vrea să verifice adevărul lui $(\varphi \wedge \psi)$;

[1] G. Frege, *Sens şi semnificaţie*, în *Logică şi filosofie*, Editura Politică, Bucureşti, 1966, p. 62.
[2] *Tractatus logico-philosophicus*, în special propoziţiile 4.46 şi 4.465.

definiţia (1.1) spune că el va putea face acest lucru chiar dacă nu ştie că numărul π este iraţional, dar nu va reuşi în încercarea sa dacă nu verifică ce valori de adevăr au propoziţiile φ şi ψ.

Trebuie, de asemenea, să facem următoarea distincţie. Constantele logice sunt simboluri, precum $\wedge$, $\vee$, – etc. Pentru fiecare din aceste simboluri am folosit câte un nume – conjuncţie, disjuncţie, negaţie etc. Dar aceste simboluri sunt folosite ca nume pentru ceea ce se cheamă *funcţii de adevăr*. Fie propoziţiile p şi q şi simbolul $\wedge$. Construim expresia $(p \wedge q)$. Expresia $(p \wedge q)$ este un complex de semne, care stă pentru o propoziţie: pentru conjuncţia propoziţiilor p şi q. Cum am văzut, admitem că valoarea de adevăr a acestei noi propoziţii este determinată univoc de: 1) valorile de adevăr ale propoziţiilor componente; 2) proprietăţile conjuncţiei. Conjuncţia nu solicită să apelăm la nici o altă proprietate a propoziţiilor componente în afara valorii lor de adevăr. În acest sens zicem: conjuncţia este o funcţie care din două propoziţii produce o altă propoziţie (pe care, pentru a nu complica lucrurile, o numim tot „conjuncţia" celor două propoziţii) şi care e *de adevăr;* pe scurt, conjuncţia este o *funcţie de adevăr.* Atenţie deci: *semnul* $\wedge$ este un conectiv logic, care *stă pentru* (numeşte; sau referă la) o *funcţie de adevăr.*

Alături de conectivele logice, în logica propoziţiilor se folosesc simboluri de un alt tip, anume litere propoziţionale:

(1.7) $p, q, r, \ldots, p_1, p_2 \ldots$

Combinându-le cu ajutorul conectivele logice, putem produce expresii mai complexe, numite formule. De pildă, plecând de la literele propoziţionale p, q, r putem construi, pe rând, formulele

(1.8) $(p \vee q)$
$((p \vee q) \rightarrow r)$
$(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$

Literele propoziţionale nu au un înţeles fixat; ele însele nu sunt propoziţii, ci ţin locul unor propoziţii. Formulele (1.8) nu sunt propoziţii, dar devin propoziţii dacă p, q, r sunt înlocuite cu, de exemplu, propoziţii ale limbii române. Astfel, dacă punem:

p: Ai fost înţepat de o viespe.
q: Ai fost înţepat de o albină.
r: Sarea aplicată pe rană alină durerea.

ultima formulă din (1.8) devine propoziţia:

(1.9) (Ai fost înţepat de o viespe $\wedge$ ((ai fost înţepat de o viespe $\vee$ ai fost înţepat de o albină) $\rightarrow$ sarea aplicată pe rană alină durerea)).

De multe ori, în prezentarea logicii propoziţionale, p, q, r sunt numite „variabile propoziţionale". Această procedură nu este corectă: admiţând că p este o „variabilă", se recunoaşte că p nu este o propoziţie, ci ţine locul unei propoziţii. Dar această condiţie nu este suficientă pentru a afirma că p este o variabilă propoziţională. Pentru a fi aşa ceva, e necesară o a doua condiţie: să putem cuantifica asupra propoziţiilor, să putem, deci, ca din formula $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$ să putem conchide, de pildă, că

(1.10) Există un p astfel încât $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$ e adevărată.
Or, acest lucru nu este posibil; în logica propoziţiilor nu este permisă cuantificarea asupra propoziţiilor şi, deci, (1.10) nu este o formulă a logicii propoziţiilor. În logica propoziţiilor nu putem spune, bunăoară, că:

(1.10.1) Tot ceea ce spune Epimenide cretanul este fals.
fiindcă în (1.10.1) se cuantifică asupra propoziţiilor.

În paragraful anterior am folosit expresiile φ, ψ cu ajutorul cărora am formulat expresii ca $(\varphi \wedge \psi)$, $(\neg\varphi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ etc. Dacă folosim şi expresia χ, putem produce analogi ai formulelor (1.8):

(1.11) $(\varphi \vee \psi)$
$((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi)$
$(\varphi \wedge ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi))$

Literele propoziţionale p, q, r diferă de φ, ψ, χ în sensul următor: cele din urmă sunt *metavariabile propoziţionale*. Metavariabilele nu sunt propoziţii. Ele sunt parte a metalimbajului, adică a limbajului pe care îl folosim pentru a vorbi *despre* formule şi *despre* propoziţii obţinute din acestea prin înlocuirea literelor propoziţionale cu propoziţii. Aşadar, metavariabile propoziţionale sunt nume atât pentru formulele propoziţionale, cât şi pentru propoziţii (În metalimbaj vom face următoarea convenţie: simbolurile pentru conectivele logice vor fi folosite ca nume ale lor însele. Astfel, fie expresia: $(\varphi \vee \psi)$; simbolul „$\vee$" e folosit în metalimbaj ca nume pentru disjuncţia $\vee$ din logica propoziţiilor).

De exemplu, dacă φ este un nume în metalimbaj pentru p, ψ – pentru q, iar χ – pentru r, atunci metaexpresia $(\varphi \wedge ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$ este un nume pentru expresia $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$ a logicii propoziţiilor; iar dacă φ, ψ şi χ stau pentru propoziţii concrete, atunci e posibil ca aceeaşi metaexpresie să fie un nume pentru (1.9). Spre deosebire de literele propoziţionale p, q, r ..., simbolurile φ, ψ, χ ... sunt *metavariabile*. Aceasta înseamnă că în metalimbaj putem cuantifica asupra lor, deci pot fi folosite pentru a face enunţuri de felul:

(1.12) Oricare ar fi propoziţia φ, dacă φ este spusă de Epimenide, atunci este falsă.

Fie acum φ o formulă. O *instanţă* a lui φ este o propoziţie pe care o obţinem din φ înlocuind fiecare literă propoziţională din φ o propoziţie dintr-un limbaj, de exemplu din limba română, ţinând seama ca nici o literă propoziţională să nu fie înlocuită, în apariţiile sale diferite ale sale, cu propoziţii diferite. Dacă ştim valorile de adevăr ale acestor propoziţii într-o instanţă a lui φ, atunci putem să formăm un tabel de adevăr, cu ajutorul lui (1.2) şi (1.3), pentru a afla valoarea de adevăr a întregii instanţe.

Să presupunem că o instanţă a lui φ este (1.9); să notăm, pentru simplitate, cele trei propoziţii ce apar în această instanţă cu p, q şi r, în felul în care am procedat mai devreme; vom avea atunci $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$.

Obţinem următorul tabel de adevăr:

(1.13)

	p	q	r	$(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$						
(i)	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
(ii)	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0
(iii)	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
(iv)	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0
(v)	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
(vi)	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
(vii)	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
(viii)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
				1	7	2	5	3	6	4

Liniile (i) – (viii) din stânga înşiră toate felurile posibile în care propoziţiile p, q şi r pot avea valorile de adevăr. Coloanele din dreapta sunt calculate în ordinea arătată de numerele de la 1 la 7: mai întâi se repetă coloanele lui p (de două ori), q şi r, apoi se calculează în ordine valorile de adevăr pentru $(p \vee q)$, $((p \vee q) \rightarrow r)$ şi, în sfârşit, pentru întreaga expresie.

Cu ajutorul tabelelor de adevăr putem demonstra validitatea – în logica propoziţiilor – a unui raţionament. De pildă, fie:

(1.14) Aceea a fost o viespe, iar sarea alină durerea provocată de înţepăturilor de viespe sau de albină. Aşa că ar fi bine să-ţi pui nişte sare pe înţepătură.

În (1.14) e conţinut un raţionament, anume:

(1.15) (Ai fost înţepat de o viespe $\wedge$ ((ai fost înţepat de o viespe $\vee$ ai fost înţepat de o albină) $\rightarrow$ sarea aplicată pe rană alină durerea)

Deci: Sarea aplicată pe rană îţi va alina durerea.

Înlocuind propoziţiile componente după procedura folosită mai sus, obţinem:

(1.16) $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$. Deci: r

Acum, să calculăm tabelele de adevăr pentru premisa şi concluzia lui (1.16). Cu ajutorul lui (1.13), obţinem:

(1.17)

	p	q	r	$(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$	r
(i)	1	1	1	1	1
(ii)	1	1	0	0	0
(iii)	1	0	1	1	1
(iv)	1	0	0	0	0
(v)	0	1	1	0	1
(vi)	0	1	0	0	0
(vii)	0	0	1	0	1
(viii)	0	0	0	0	0

Observăm că ori de cîte ori premisa e adevărată (liniile (i) şi (iii)), şi concluzia e adevărată. Aşadar, nu există nici o linie în care premisa să fie adevărată, iar concluzia falsă. Raţionamentul este, deci, *valid*.

În acest paragraf s-a presupus că următoarea susţinere este corectă:

(1.18) Dacă φ este o formulă a logicii propoziţiilor, atunci orice atribuire de valori de adevăr pentru literele propoziţionale care apar φ poate fi extinsă, cu ajutorul definiţiilor (1.2) şi (1.3) ale funcţiilor de adevăr, astfel încât să obţinem valoarea de adevăr a lui φ; această valoare de adevăr atribuită lui φ este unică şi poate fi calculată într-un mod mecanic.

Susţinerea (1.18) este teza centrală a logicii propoziţiilor. Mai devreme am văzut cum funcţionează aceasta pe un exemplu concret: cum, pornind de la valori de adevăr pentru p, q şi r (liniile (i)–(viii) în (1.13)), calculăm valorile de adevăr pentru formule mai complexe, precum $(p \vee q)$, $((p \vee q) \rightarrow r)$ sau $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$. Dar acest exemplu reuşit nu ne spune dacă, în chip necesar:

a) procedura urmată pentru a calcula valorile de adevăr pentru propoziţiile mai complexe funcţionează întotdeauna;

b) valorile de adevăr pe care le calculăm sunt unic determinate de tabelele de adevăr.

Intuitiv, tezele exprimate de (a) şi (b) sunt corecte; dar este nevoie să dovedim că este aşa. Modul în care se poate face acest lucru e următorul: să observăm mai întâi că formulele sunt mai mult sau mai puţin complexe. Ideea este aceea de a arăta că, dacă (1.18) este valabilă pentru formule mai simple, atunci va fi valabilă şi pentru formulele construite din acestea cu ajutorul conectivelor logice. Principiul care va fi folosit în demonstraţie este cel al *inducţiei matematice*. El are forma:

(1.19) Să presupunem că numărul 0 are o anumită proprietate; să presupunem de asemenea că ori de cîte ori numerele de la 0 la n inclusiv au acea proprietate, şi numărul $n + 1$ o are. Atunci se poate conchide că toate numerele naturale au acea proprietate.

Dificultatea constă în a face aplicabil acest principiu al inducţiei matematice în cazul nostru. Procedura va consta în următoarele: fiecărei formule a logicii propoziţiilor i se va atribui un număr natural unic determinat (egal sau mai mare cu 0). Apoi se va arăta că susţinerea (1.18) e adevărată pentru toate formulele cărora li s-a atribuit numărul 0. De asemenea, se va arăta că dacă susţinerea (1.18) se aplică tuturor formulelor care au un număr mai mic sau egal cu n, atunci se va aplica obligatoriu şi formulelor care au numărul $n + 1$. De unde vom putea conchide că (1.18) se aplică tuturor formulelor.

Pentru aceasta, e nevoie însă de introducerea într-un mod riguros a noţiunii de formulă.

§ 2. Limbajul formal al logicii propoziţiilor

Am definit o instanţă a lui φ ca o propoziţie pe care o obţinem înlocuind fiecare literă propoziţională care apare în φ cu o propoziţie dintr-un limbaj; exemplul dat a fost cel al propoziţiilor din limba română. Este acum momentul să precizăm într-un mod mai abstract acest lucru.

Fie S o mulţime de propoziţii. S e o mulţime oarecare de propoziţii; ceea ce se cere este doar ca ea să fie fixată, adică să îi fie determinate elementele (= propoziţiile pe care le conţine). Acum vom defini limbajul propoziţional $L(S)$ construit din propoziţiile din S.

Simbolurile lui $L(S)$ sunt următoarele:

(2.1) a) toate propoziţiile din S;

b) conectivele logice: $-$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;

c) parantezele: (,).

Intuitiv, elementele lui S stau pentru afirmaţii simple, iar conectivele logice, pentru cuvintele folosite pentru a combina afirmaţiile simple în altele complexe. Urmează acum să definim propoziţiile lui $L(S)$, pe scurt: propoziţiile.

(2.2) Definiţia *propoziţiilor*:

a) dacă φ este un element al lui S, atunci φ este o propoziţie;

b) dacă φ este o propoziţie, atunci $(-\varphi)$ este o propoziţie;

c) dacă φ şi ψ sunt propoziţii, atunci $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ şi $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sunt propoziţii;

d) un şir finit de simboluri ale lui $L(S)$ este o propoziţie dacă şi numai dacă se poate arăta că este o propoziţie aplicând de un număr finit de ori punctele (a) – (c).

Întru-un mod puţin mai complicat, noţiunea de propoziţie a lui $L(S)$ poate fi construită simultan cu noţiunea de complexitate a unei propoziţii a lui $L(S)$, astfel:

(2.3) a) Dacă φ este un element al lui S, atunci φ este o propoziţie şi are complexitatea 0;

b) dacă φ este o propoziţie şi are complexitatea n, atunci $(-\varphi)$ este o propoziţie şi are complexitatea $n + 1$;

c) dacă φ şi ψ sunt propoziţii şi au complexitatea n, respectiv m, atunci $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ şi $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ sunt propoziţii şi au complexitatea $n + m + 1$;

d) la fel ca la (2.2).

De pildă, fie p şi q elemente ale lui S. Atunci:
p şi q sunt propoziţii şi au complexitatea 0;
$(-p)$ este o propoziţie de complexitatea $0 + 1 = 1$;
$(p \vee q)$ este o propoziţie şi are complexitatea $0 + 0 + 1 = 1$;
$((-p) \vee q)$ este o propoziţie şi are complexitatea $1 + 0 + 1 = 2$ etc.
Vom enunţa, fără demonstraţie, câteva leme:

(2.4) Dacă φ este o propoziţie, atunci numărul de apariţii ale lui "(" în φ este egal cu numărul de apariţii ale lui ")" în φ.

(2.5) Dacă φ este o propoziţie, atunci în ea există un singur conectiv logic principal, care are proprietatea că dacă la stânga lui simbolul ")" apare de n ori, atunci simbolul "(" apare la stânga lui de $n + 1$ ori.

(2.6) Dacă φ are complexitatea n şi $n \neq m$, atunci φ nu are complexitatea m.

Acum putem reveni la susţinerea (1.18). Să o demonstrăm prin inducţie. Fie o formulă φ. Dacă ea are complexitatea 0, atunci este un element din S, iar atribuirile de valori de adevăr pentru φ se fac în mod automat în tabelele de adevăr. Spre exemplu, dacă φ este p din tabelul (1,13), atribuirile de adevăr pentru p (coloanele 1 şi 2) sunt obţinute prin simpla recopiere a primei coloane din stânga tabelului. Să presupunem acum că $n > 0$. Atunci, conform cu (2.6), formula φ are o complexitate unic determinată n şi, dacă $m \neq n$, atunci φ nu are complexitatea m. Potrivit lui (2.5), putem determina conectivul logic principal din φ. Fără a pierde generalitatea, să presupunem că acesta este $\vee$. Atunci φ este o propoziţie $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$. La rândul lor, φ_1 şi φ_2 au complexităţi bine determinate m_1 şi m_2 şi potrivit lui (2.3), punctul (c), $n = m_1 + m_2 + 1$. De aici rezultă imediat că

$m_1 < n$.
$m_2 < n$.

Potrivit pasului inductiv, susţinerea (1.18) este adevărată pentru orice propoziţie care are o complexitate mai mică decât n; aşadar, pentru φ_1 şi pentru φ_2 am calculat deja cu ajutorul tabelelor de adevăr, pentru fiecare atribuire de valori de adevăr pentru elementele lui S care apar în φ, o valoare de adevăr bine determinată. Făcând apel la tabelul (1.3), obţinem şi pentru φ o valoare de adevăr bine determinată. La fel se procedează când în φ conectivul logic principal este negaţia, conjuncţia, implicaţia sau echivalenţa. Aplicând principiul inducţiei matematice (1.19), rezultă că (1.18) este adevărată pentru orice formulă a lui $L(S)$.

§ 3. Validitate şi tautologie

În paragrafele anterioare au fost introduse noţiunile preliminare în vederea formulării *teoriei modelelor* pentru logica propoziţiilor.

Teoria modelelor este aceea ramură a logicii matematice care se ocupă cu relaţia dintre limbajele formale şi interpretările acestora: *modelele*. Este o ramură relativ nouă a logicii, care a înflorit în special din anii '50 (numele însuşi al acestui gen de preocupări logice a fost avansat în 1954 de A. Tarski), chiar dacă unele rezultate (în principal teoremele lui Löwenheim şi Skolem) au fost obţinute mai devreme. Teoria modelelor studiază raporturile dintre noţiuni *sintactice* şi noţiuni *semantice*. Sintaxa priveşte structura pur formală a limbajului. Noţiuni sintactice sunt, de pildă, cea de propoziţie, cea de complexitate a unei propoziţii etc. În cele ce urmează vor fi definite şi studiate şi alte noţiuni sintactice: cele de demonstraţie, teoremă, tautologie etc. Semantica priveşte interpretarea sau înţelesul unui sistem formal. Noţiunile semantice deja amintite sunt cele de adevăr şi de fals, tabelele de adevăr. În continuare vor fi introduse şi studiate şi alte noţiuni semantice, precum cele de validitate, consecinţă etc.

Pentru a construi o teorie a modelelor, trebuie pornit de la un limbaj formal. Limbajul $L(S)$ este un bun exemplu pentru a introduce ideile de bază ale teoriei modelelor, chiar dacă el este extrem de simplu. Puntea dintre un limbaj formal şi interpretările sale este furnizată de *definiţiile de adevăr*, care specifică valoarea de adevăr a fiecărei propoziţii, în fiecare model.

Ce este un model al logicii propoziţionale? Ce este, deci, o interpretare a logicii propoziţiilor? Primul răspuns care vine în minte este acesta: o interpretare, deci un model al logicii propoziţiilor, este o funcţie care ataşează fiecărei propoziţii din S o valoare de adevăr: adevărul sau falsul. Putem modifica puţin această intuiţie, în felul următor: pentru a construi modelul M, fiecărei propoziţii din S i se va ataşa o valoare de adevăr. Să definim atunci pe M ca fiind mulţimea acelor propoziţii din S cărora li se ataşează valoarea de adevăr adevărul. Acum, evident, dacă o propoziţie din S nu aparţine mulţimii M, ştim că în acest model valoarea de adevăr care i s-a ataşat este falsul.

(3.1) Un model M pentru $'(S)$ este o submulţime M a lui S.

Dacă, de pildă, S este o mulţime finită şi are n elemente, atunci vor exista 2^n submulţimi ale lui S şi deci 2^n modele ale lui $L(S)$. Între acestea, vor exista şi modelele $M = \emptyset$, când în M nu e adevărată nici o propoziţie din S, şi $M = S$, când toate propoziţiile din S sunt adevărate în M.

Un model este deci o *situaţie* în care sunt adevărate unele propoziţii din S. Am putea spune chiar că un model este o stare posibilă a lumii în care ar fi adevărate unele din propoziţiile din S.

Putem acum să începem construirea punţii dintre limbajul $L(S)$ şi modelele sale. Primul pas e acela de a da o definiţie a *adevărului* unei propoziţii într-un model. Vom exprima faptul că o propoziţie φ este adevărată în modelul M prin notaţia

$M \models \varphi$

Relaţia $M \models \varphi$ este definită astfel:

(3.2) Definiţia adevărului unei propoziţii φ în modelul M:

a) dacă φ este un simbol propoziţional din S, atunci $M \models \varphi$ ddacă $\varphi \in M$;

b) dacă φ este o propoziţie $(\neg \psi)$, atunci $M \models \varphi$ ddacă nu este cazul că $M \models \psi$;

c) dacă φ este o propoziţie $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, atunci $M \models \varphi$ ddacă $M \models \varphi_1$ şi $M \models \varphi_2$;

d) dacă φ este o propoziţie $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, atunci $M \models \varphi$ ddacă $M = \varphi_1$ sau cel puţin $M \models \varphi_2$;

e) dacă φ este o propoziţie $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)$, atunci $M \models \varphi$ ddacă sau nu este cazul că $M \models \varphi_1$ sau e cazul că $M \models \varphi_2$;

f) dacă φ este o propoziţie $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2)$, atunci $M \models \varphi$ ddacă: $M \models \varphi_1$ ddacă $M \models \varphi_2$.

Atunci când $M \models \varphi$, spunem că φ este *adevărată* în M, sau că φ *are loc* în M, sau că M *este un model al* lui φ; când nu e cazul că $M \models \varphi$, spunem că φ este *falsă* în M, sau că φ *nu are loc* în M, sau că M *nu este un model al* lui φ. Se observă imediat, pe baza lui (b), că φ este falsă în M ddacă $(\neg \varphi)$ este adevărată în M, în simboluri $M \models (\neg \varphi)$.

Un gen special de propoziţii e constituit de cele *valide*. O propoziţie este validă, în simboluri.

$\models \varphi$

ddacă φ este adevărată în toate modelele. Alte noţiuni semantice, înrudite cu cea de validitate, sînt următoarele:

a) o propoziţie este realizabilă ddacă există un model în care ea este adevărată;

b) o propoziţie este nerealizabilă ddacă negaţia sa este validă.

Pentru a determina dacă o propoziţie φ este validă, e necesar deci să se inspecteze toate modelele lui $L(S)$; iar dacă S este o mulţime infinită, acestea sunt infinite ca număr. Decurge de aici că determinarea validităţii lui φ nu se poate realiza printr-un test simplu, desfăşurat întotdeauna printr-un număr

finit de paşi. Din fericire însă, aşa cum vom vedea, aplicând o strategie indirectă, se poate determina într-un număr finit de paşi dacă o propoziţie φ este validă sau nu.

Să observăm, în acest sens, că dacă facem apel la noţiuni sintactice, nu semantice, putem determina precis, printr-un număr finit de paşi, dacă o propoziţie este validă. Procedura de decizie sintactică se bazează pe noţiunea de *tautologie*. Vom defini aici tautologia în termeni sintactici, deci prin raportare strict la limbajul formal *L(S)*, fără a face apel la noţiuni semantice (model, adevăr, validitate etc.). Atenţie, de multe ori expresia „tautologie" e folosită într-un sens semantic: este tautologie o formulă care are valoarea de adevăr adevărul în orice linie a tabelului de adevăr pe care i-l construim. Dar în această lucrare expresia va fi folosită consecvent într-un sens sintactic.

Fie φ o propoziţie în care apar $n + 1$ ($n > 0$) simboluri din S. Să le notăm cu $p_0, \ldots p_n$. Fie acum $a_0, \ldots a_n$ un şir format din două litere, t şi f. Cititorul tentat să ia pe t ca însemnând adevărul iar pe f ca însemnând falsul – tentat, deci, să considere că, pe ascuns, am introdus în discuţie noţiuni semantice – va putea să accepte următoarea convenţie: t este un nume pentru paranteza (, iar f este un nume pentru paranteza). Convenţia accentuează că alegerea celor două litere nu are nici o semnificaţie specială. Vom numi *atribuire* orice şir de forma $a_0, \ldots a_n$. Acum să definim noţiunea de *valoare* a unei propoziţii φ pentru atribuirea $a_0, \ldots a_n$:

(3.3) a) Dacă φ este o propoziţie p_m din S şi $m \leq n$, atunci valoarea lui φ este a_m;

b) dacă φ este $(- \psi)$, atunci valoarea lui φ este opusul valorii lui ψ (opusul lui t este f, iar opusul lui f este t);

c) dacă φ este $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, atunci valoarea lui φ este t dacă valorile lui φ_1 şi φ_2 sunt amb·le t; altminteri, valoarea lui φ este f.

Nu vom mai formula în continuare condiţiile pentru celelalte funcţii de adevăr; cititorul le poate construi singur, ca exerciţiu.

Să observăm cât de asemănătoare sunt definiţiile (3.3) şi (3.2). Dar ele diferă în chip esenţial, şi anume în două locuri:

1) (3.2) este semantică, (3.3) este sintactică;

2) în timp ce (3.2) implică un model posibil infinit, când S este infinită, (3.3) implică doar o atribuire finită $a_0, \ldots a_n$.

Sintactic, noţiunea corespunzătoare celei semantice de validitate este noţiunea de *tautologie*. Fie φ o propoziţie, iar $p_0, \ldots p_n$. toate simbolurile din S care apar în φ. Spunem că φ este tautologie, în simboluri

$$\vdash \varphi$$

ddacă φ are valoarea t pentru orice atribuire $a_0, \ldots a_n$ de $n + 1$ litere t şi f.

Valoarea lui φ pentru o atribuire $a_0, \ldots a_n$ poate fi calculată foarte uşor, cu ajutorul tabelelor de adevăr definite în §1. Să accentuăm însă iarăşi că, în folosirea acestora, aici *nu* se presupune că avem a face cu *interpretări* ale

propoziţiilor ce apar în φ, cu ataşarea unor valori de adevăr pentru acestea. Aici nu avem a face decât cu funcţii care ataşează ficcărei propoziţii simple o valoare *t* sau *f* – dar fără să dăm vreun înţeles acestor valori – şi cu extinderea, conform principiului (1.18) – iarăşi neînţeles semantic, ca implicând deci noţiunea de adevăr – a acestor funcţii la orice propoziţie ψ a lui *L*(*S*).

(3.4) Dacă toate propoziţiile din *S* care apar în φ se află printre p_0, ... p_n, atunci valoarea lui φ pentru atribuirea a_0, ... a_n, ... a_{n+m} este aceeaşi cu valoarea lui φ pentru atribuirea a_0, ... a_n.

Analog lui (1.18), expresia (3.4) evidenţiază că valoarea lui φ depinde doar de propoziţiile lui *S* care efectiv apar în φ, nu şi de celelalte propoziţii din *S* care nu concură în compunerea lui cu ajutorul conectivelor logice.

Mai sus s-a afirmat că noţiunea sintactică de tautologie corespunde celei semantice de validitate. Sensul acestei „corespondenţe" este dat de următoarele două teoreme:

(3.5) *Teorema de corectitudine.* Dacă φ este o tautologie, atunci φ este validă. În simboluri: dacă ⊢ φ, atunci ⊨ φ.

(3.6) *Teorema de completitudine.* Dacă φ este valabilă, atunci φ este o tautologie. În simboluri: dacă ⊨ φ, atunci ⊢ φ.

Cele două teoreme sunt puse uneori împreună sub numele de *teorema de completitudine* – teza că

(3.7) ⊨ φ ddacă ⊢ φ.

În cuvinte: φ este validă ddacă este tautologie.

Teorema (3.7) evidenţiază cu limpezime sensul corespondenţei între cele două noţiuni, una sintactică şi una semantică: ambele definesc aceeaşi mulţime de propoziţii.

Un corolar al teoremei (3.7) este următorul: întrucât putem decide pentru orice propoziţie φ, cu ajutorul lui (3.3), dacă ea este sau nu tautologie într-un număr finit de paşi, înseamnă că – potrivit acum teoremei de completitudine – putem decide într-un număr finit de paşi dacă ea este validă.

Pentru a demonstra teoremele (3.5) şi (3.6), deci teorema de completitudine (3.7), avem nevoie de o lemă ajutătoare. Fie φ o propoziţie, şi fie toate propoziţiile din *S* care apar în φ printre p_0, ... p_n. Să luăm un model oarecare *M* al lui *L*(*S*). *M* este, desigur, o submulţime a lui *S*. Acum, pentru $m = 0,1$, ... *n*, să punem $a_m = t$ dacă $p_m \in M$ şi $a_m = f$ dacă $p_m \notin M$. Plecând de la un oarecare model *M*, obţinem astfel o atribuire a_0, ... a_n. Prin inducţie, e uşor să se arate că

(3.8) *M* ⊨ φ ddacă valoarea lui φ pentru atribuirea a_0, ... a_n este *t*.

Demonstraţia acestei leme se face prin inducţie:

a) dacă φ este un simbol din S, atunci (3.8) are loc, potrivit definiţiei atribuirii $a_0, \ldots a_n$;

b) dacă φ este $(-\psi)$, atunci prin inducţie $M \models \psi$ ddacă valoarea lui ψ pentru atribuirea $a_0, \ldots a_n$ este t, sau, echivalent, $M \models \psi$ nu are loc ddacă valoarea lui ψ pentru atribuirea $a_0, \ldots a_n$ este f. Ţinând cont de definiţia lui M, avem: nu este cazul că $M \models \psi$ ddacă $M \models (-\psi)$. Pe de altă parte, valoarea lui ψ pentru atribuirea $a_0, \ldots a_n$ este f dacă valoarea lui $(-\psi)$ pentru atribuirea lui $a_0, \ldots a_n$ este t. Cu aceasta, (3.8) e demonstrat pentru cazul (b). Celelalte cazuri sunt lăsate ca exerciţiu.

Acum putem trece la demonstrarea teoremei de completitudine.

Demonstraţia lui (3.5). Să presupunem că φ este o tautologie. Atunci, pentru orice atribuire $a_0, \ldots a_n$, valoarea lui φ este t. Să presupunem că φ nu este validă. Atunci există un model astfel încât φ este falsă în M, deci relaţia $M \models \varphi$ nu are loc. Conform definiţiei modelului, $(-\varphi)$ este adevărată în M, în simboluri $M \models (-\varphi)$. Însă în $(-\varphi)$ apar aceleaşi simboluri din S care apar şi în φ, deci acestea se găsesc printre $p_0, \ldots p_n$. Aşadar, orice şir $a_0, \ldots a_n$ este o atribuire pentru care $(-\varphi)$ are o valoare. Potrivit procedurii indicate mai sus, plecând de la modelul M obţinem o atribuire $a_0, \ldots a_n$ astfel încât valoarea lui $(-\varphi)$ este t şi, deci, valoarea lui φ este f. Dar această atribuire $a_0, \ldots a_n$ este, în acelaşi timp, o atribuire pentru φ. Conform supoziţiei făcute, valoarea lui φ pentru orice atribuire este t – ceea ce contrazice însă rezultatul obţinut. Aşadar, φ este validă.

Demonstraţia lui (3.6). Să presupunem că φ este validă. Atunci, oricare ar fi modelul M al lui $L(S)$, $M \models \varphi$ Dacă φ nu este o tautologie, înseamnă că există o atribuire $a_0, \ldots a_n$ pentru care valoarea lui φ este f. Dar orice atribuire e obţinută dintr-un model M şi atunci, conform lui (3.8), nu este cazul că $M \models \varphi$, ceea ce produce o contradicţie. Aşadar, φ este tautologie.

§ 4. Consecinţă şi deducţie

În acest paragraf vom introduce două noi noţiuni care îşi corespund: cea sintactică de *deducţie* şi cea semantică de *consecinţă*. Ambele reprezintă precizări ale relaţiei informale:

φ *implică logic* ψ.

Să începem cu noţiunea de deducţie. Ea se bazează pe posibilitatea de a distinge, dintre propoziţiile lui $L(S)$, o clasă a tautologilor. În paragraful anterior am prezentat o metodă – cea care face apel la noţiunea de valoare a unei propoziţii pentru o atribuire – de a stabili când o propoziţie este tautologie. Există însă

şi alte metode de a selecta tautologiile. Pe scurt, vom menţiona două: metoda lui Hilbert şi metoda lui Gentzen.

a) *Metoda lui Hilbert.* Aceasta constă în alegerea unei mulţimi de propoziţii Σ ale lui $L(S)$, numite *axiome*, împreună cu *reguli de derivare* a unor noi formule. Tautologiile vor fi axiomele şi toate propoziţiile care pot fi obţinute din axiome, aplicând de un număr finit de ori regulile de derivare. Cu titlu de exemplu, prezentăm aici un sistem axiomatic. Acesta este o pereche (Σ, R), unde Σ este mulţimea formată din următoarele 13 formule:

(4.1.1.) $(\varphi \to (\psi \to \varphi))$
(4.1.2.) $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi)))$
(4.1.3.) $((\varphi \wedge \psi) \to \varphi)$
(4.1.4.) $((\varphi \wedge \psi) \to \psi)$
(4.1.5.) $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$
(4.1.6.) $(\varphi \to (\varphi \vee \psi))$
(4.1.7.) $(\varphi \to (\psi \vee \varphi))$
(4.1.8.) $((\varphi \to \chi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)))$
(4.1.9.) $((\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\neg\ \psi)) \to (\neg\ \varphi)))$
(4.1.10.) $((\neg\ (\neg\varphi) \to \varphi)$
(4.1.11.) $((\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \to \psi))$
(4.1.12.) $((\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\psi \to \varphi))$
(4.1.13.) $((\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi)))$

iar R este următoarea regulă de derivare (*modus ponens* sau *regula detaşării*):

(4.2) Dacă φ şi $(\varphi \to \psi)$ sunt tautologii, atunci şi ψ este o tautologie.

Aici trebuie făcută următoarea observaţie: în mod obişnuit se formulează şi o a doua regulă de derivare, regula substituţiei. Bunăoară, axioma (4.1.1) este dată sub forma

(4.1.1') $(p \to (q \to p))$

iar regula substituţiei permite să înlocuim în mod uniform fiecare literă propoziţională care apare în (4.1.1') – p şi q – cu orice propoziţie. Astfel, din (4.1.1') se pot obţine drept tautologii, prin regula substituţiei, propoziţii precum:

(i) $((p \wedge q) \to (q \to (p \wedge q)))$
(ii) $(p \to ((p \wedge q) \to p))$
(iii) $(p \to (p \to p))$ etc.

În felul în care am formulat axiomele sistemului, nu e nevoie de regula substituţiei; aceasta, datorită folosirii metavariabilelor. Într-adevăr în (4.1.1.) φ poate sta pentru $(p \wedge q)$, iar ψ pentru q (ca în (i)), sau φ poate sta pentru p, iar ψ pentru $(p \wedge q)$ (ca în (ii)) etc.

Iată un exemplu de tautologie care poate fi demonstrată în sistemul (Σ, R):

(4.3) $(\varphi \rightarrow \varphi)$

Să observăm că următoarele propoziţii sunt axiome:

1. $(\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$ (axioma (4.1.1))
2. $(\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi))$ (axioma (4.1.1))
3. $((\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi)))$ (axioma (4.1.2))

De aici obţineau uşor:

4. $((\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \varphi))$ (din (1) şi (3), prin regula (4.2)).
5. $(\varphi \rightarrow \varphi)$ (din (2) şi (4), prin regula (4.2)

Metoda lui Hilbert este ineficientă şi neintuitivă; o cantitate mare de efort trebuie depusă pentru a produce ca tautologii propoziţii foarte simple, bunăoară $(\varphi \vee (-\varphi))$ ori $(\varphi \leftrightarrow (-(-\varphi)))$. În plus, trebuie dovedit că mulţimea propoziţiilor care pot fi demonstrate într-un sistem ca (Σ, R) este *exact* mulţimea propoziţiilor care sunt tautologii potrivit procedurii descrise în paragraful anterior. Iar demonstraţia acestui fapt este extrem de dificilă. Metoda lui Hilbert are însă cel puţin două merite importante: în primul rând, sistemele axiomatice definite fac apel la mecanisme extrem de simple de derivare a unei propoziţii din altele; ca în cazul nostru, uneori numai o singură regulă de derivare apare ca necesară (cel mai adesea e vorba de modus ponens). În al doilea rând, metoda lui Hilbert permite să se observe uşor ce se întâmplă dacă unele dintre axiome sunt întărite, slăbite ori chiar eliminate. Acest fapt este extrem de folositor când se construiesc logici neclasice, de pildă logici polivalente sau logici ale implicaţiei stricte.

În paragraful anterior am definit relaţia $\vdash$; $\vdash \varphi$ înseamnă că φ este (potrivit metodei valorii de adevăr a propoziţiilor pentru o atribuire) o tautologie. Să ne amintim că Σ e mulţimea axiomelor (4.1.1) – (4.1.13); să notăm cu $\Sigma \vdash_R \varphi$ relaţia: propoziţia φ este derivabilă din Σ cu ajutorul regulii R. Rezultatul amintit mai sus privitor la metoda lui Hilbert e următorul:

(4.4) $\vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vdash_R \varphi$.

Relaţia $\Sigma \vdash_R \varphi$ presupune deci două elemente: o mulţime de propoziţii (luate ca premise ale demonstraţiei) şi un set de reguli – în cazul nostru, singura regulă este modus ponens – cu ajutorul cărora pot fi derivate alte propoziţii din premisele date.

b) *Metoda lui Gentzen.* Ea constă în a formula o mulţime R de reguli care să ne asigure obţinerea tuturor tautologiilor, în sensul următor: să scriem $\vdash_R \varphi$ – în cuvinte: φ, este deductibilă – pentru cazul în care $\Gamma \vdash_R \varphi$ şi $\Gamma = \emptyset$, deci când mulţimea premiselor de la care se pleacă pentru a obţine pe φ este mulţimea vidă. Problema devine deci următoarea: să se construiască R astfel încât

(4.5) φ este tautologie (simbolic, $\vdash \varphi$) ddacă $\vdash_R \varphi$.

În stilul lui Gentzen pot fi produse diverse astfel de mulţimi R de reguli de derivare. Un exemplu este următorul (aici se dau reguli pentru fiecare funcţie de adevăr: mai întâi unele de *introducere* a funcţiei, apoi unele de *eliminare* a funcţiei; natura regulilor va fi marcată prin litera i, respectiv e, ataşată numărului regulii):

(4.6.1.i) Dacă $\Gamma, \varphi \vdash_R \psi$, atunci $\Gamma \vdash_R (\varphi \to \psi)$

(4.6.1.e) Dacă $\Gamma \vdash_R \varphi$ şi $\Gamma \vdash_R (\varphi \to \psi)$, atunci $\Gamma \vdash_R \psi$.

(4.6.2.i) $\Gamma, \varphi, \psi \vdash_R (\varphi \wedge \psi)$

(4.6.2.e) a) $\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash_R \varphi$

b) $\Gamma, (\varphi \wedge \psi) \vdash_R \psi$

(4.6.3.i) a) $\Gamma, \varphi \vdash_R (\varphi \vee \psi)$

b) $\Gamma, \psi \vdash_R (\varphi \vee \psi)$

(4.6.3.e) Dacă $\Gamma, \varphi \vdash_R \psi$ şi $\Gamma, \chi \vdash_R \psi$ şi $\Gamma \vdash_R (\varphi \vee \chi)$, atunci $\Gamma \vdash_R \psi$.

(4.6.4.i) Dacă $\Gamma, \varphi \vdash_R \psi$ şi $\Gamma, \varphi \vdash_R (-\psi)$, atunci $\Gamma \vdash_R (- \varphi)$

(4.6.4.e) a) $\Gamma, (- (- \varphi)) \vdash_R \varphi$

b) $\Gamma, \varphi, (- \varphi)) \vdash_R \psi$

(4.6.5.i) $\Gamma, (\varphi \to \psi), (\psi \to \varphi) \vdash_R (\varphi \leftrightarrow \psi)$

(4.6.5.e) a) $\Gamma, (\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_R (\varphi \to \psi)$

b) $\Gamma, (\varphi \leftrightarrow \psi) \vdash_R (\psi \to \varphi)$

(4.6.6) Dacă $\Gamma \vdash_R \varphi$, atunci $\Gamma, \Delta \vdash_R \varphi$ pentru orice mulţime Δ de propoziţii ale lui $L(S)$.

Ca şi în cazul metodei lui Hilbert, să vedem cum pot fi utilizate aceste reguli pentru a produce tautologii. Cum în continuare e presupus că ne raportăm la mulţimea R de reguli formulată mai sus, vom scrie simplu $\Gamma \vdash \varphi$ în loc de $\Gamma \vdash_R \varphi$. Să demonstrăm:

(4.7.) $\vdash (\varphi \to \varphi)$

Mai întâi, vom demonstra lema:

(4.7.1) Dacă $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ şi $\Gamma, \psi \vdash \chi$, atunci $\Gamma, \varphi \vdash \chi$.

1. Presupunem $\Gamma, \varphi \vdash \psi$
2. Presupunem $\Gamma, \psi \vdash \chi$
3. $\Gamma, \varphi, \psi \vdash \chi$ (din (2), cu ajutorul lui (4.6.6), luând pe Δ ca $\{\varphi\}$).
4. $\Gamma, \varphi, \vdash (\psi \rightarrow \chi)$ (din (3), cu ajutorul lui (4.6.1.i))
5. $\Gamma, \varphi, \vdash \chi$ (din (1) şi (4), cu ajutorul lui (4.6.1.e)), q.e.d.

Vom demonstra acum o a doua lemă:

(4.7.2) $\Gamma, \varphi, \vdash (\neg (\neg \varphi))$

6. $\Gamma, \varphi, (\neg \varphi) \vdash \varphi$ (din (4.6.4.e), punctul (b), punând $\psi = \varphi$
7. $\Gamma, \varphi, (\neg \varphi) \vdash (\neg \varphi)$ (din (4.6.4.e), punctul (b), punând $\psi = (\neg \varphi)$
8. Dacă $\Gamma, \varphi, (\neg \varphi) \vdash \varphi$ şi $\Gamma, \varphi, (\neg \varphi) \vdash (\neg \varphi)$, atunci $\Gamma, \varphi \vdash (\neg(\neg \varphi))$ (din 4.6.4.i), punând $\Gamma = \Gamma, \varphi$ şi $\psi = (\neg \varphi)$)
9. $\Gamma, \varphi \vdash (\neg(\neg \varphi))$ (din (6), (7) şi (8))

Acum, aplicând lema (4.7.1) la (4.6.4.e), punctul (a) şi (9) avem:

10. $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$

De aici prin (4.6.1.i):

11. $\Gamma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi)$

iar dacă punem $\Gamma = \emptyset$, obţinem pe (5.7), q.e.d.

*
* *

În cele ce urmează vom proceda într-un alt mod pentru a construi sintactic relaţia φ *implică logic* ψ. În primul rând, vom accepta că există un procedeu anterior de selectare a tautologiilor din mulţime propoziţiilor lui *L(S)*. Acest procedeu poate fi metoda lui Hilbert, a lui Gentzen ori cea a valorii propoziţiilor pentru diverse atribuiri. În al doilea rând, vom defini relaţia de implicaţie logică într-un mod mai general, ca: Σ implică logic φ – simbolic $\Sigma \vdash \varphi$ – unde Σ este o mulţime oarecare dar fixată de propoziţii ale lui *L(S)*. Să observăm aici că: a) dacă Σ este $\{\varphi\}$, atunci relaţia $\Sigma \vdash \varphi$ devine $\varphi \vdash \psi$, adică φ implică logic ψ; b) mulţimea Σ poate fi finită sau infinită.

Vom introduce noţiunea de *deducţie formală* în logica propoziţională *L(S)*.

Regula *detaşării* (modus ponens) afirmă că:

Din φ şi $(\varphi \rightarrow \psi)$ se inferă ψ.

Spunem că ψ e inferată din φ şi θ prin detaşare dacă θ este $(\varphi \rightarrow \psi)$. Să luăm acum o mulţime Σ, finită sau infinită, de propoziţii din *L(S)*.

(4.8) Propoziţia φ este *deductibilă* din Σ, în simboluri $\Sigma \vdash \varphi$, ddacă există un şir finit $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_n$ astfel încât $\varphi = \psi_n$ şi fiecare propoziţie ψ_m $(0 \leq n)$ este sau o

tautologie, sau aparţine lui Σ, sau este inferată prin detaşare din două propoziţii ψ_p şi ψ_q care apar mai devreme în şir (deci, $p < m$, $q < m$). Şirul $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_n$ se numeşte o *deducţie* a lui φ din Σ.

Să notăm următorul rezultat imediat: φ este deductibilă din mulţimea vidă $\Sigma = \emptyset$ ddacă φ este tautologie.

Următoarele definiţii sunt foarte importante: mulţimea Σ de propoziţii este inconsistentă ddacă oricare ar fi propoziţia φ, $\Sigma \vdash \varphi$. Σ este *consistentă* ddacă Σ nu este inconsistentă. Σ este *maximal consistentă* ddacă Σ este consistentă şi singura mulţime consistentă în care Σ este inclusă e ea însăşi.

(4.9.1) Dacă Σ este consistentă şi Γ este mulţimea tuturor propoziţiilor deductibile din Σ, atunci Γ este consistentă.

Demonstraţie. Să presupunem că Σ este consistentă, dar Γ nu este consistentă. Atunci pentru orice φ, $\Gamma \vdash \varphi$. Aşadar, pentru orice φ există o deducţie $\psi_0, \ldots \psi_n = \varphi$ din Γ. Fiecare ψ_m este sau tautologie, sau aparţine lui Γ, sau este inferată prin detaşare din două propoziţii ψ_p şi ψ_q care apar mai devreme în şir. Să arătăm că există o deducţie $\theta_0, \ldots \theta_r = \varphi$ a lui φ din Σ. Aceasta se construieşte în felul următor: dacă ψ_0 este o tautologie, atunci θ_0 este ψ_0. Dacă ψ_0 aparţine lui Γ, cum Γ este mulţimea tuturor propoziţiilor deductibile din Σ, înseamnă că ψ_0 este deductibilă din Σ. Aşadar, există un şir finit $\chi_0, \chi_1, \ldots \chi_{n_0}$ de propoziţii care este o deducţie a lui ψ_0 din Σ. Atunci punem în locul lui θ_0 şirul χ_0, χ_n. Presupunem acum că am construit segmentul şirului $\theta_0, \ldots \theta_r$ corespunzător deducţiei $\psi_0, \ldots \psi_n = \varphi$ pentru toţi ψ_i, cu $i < m$. Dacă ψ_m este o tautologie, atunci acelui segment îi adăugăm pe ψ_m; dacă ψ_m aparţine lui Γ, atunci adăugăm acelui segment şirul $\zeta_0, \ldots \zeta_{n_m}$ care e o deducţie a lui ψ_m din Σ; dacă ψ_m se obţine din două propoziţii care apar anterior în şirul $\psi_0, \ldots \psi_n$, prin aplicarea regulii detaşării, atunci segmentului lui $\theta_0, \ldots \theta_n$ pe care îl avem construit deja îi adăugăm pe ψ_m. În acest fel am obţinut o deducţie a lui φ din Σ. Cum φ este oarecare, înseamnă că $\Sigma \vdash \varphi$ pentru orice φ, ceea ce încalcă supoziţia că Σ este o mulţime consistentă.

(4.9.2) Dacă Σ este maximal consistentă şi $\Sigma \vdash \varphi$, atunci $\varphi \in \Sigma$.

Demonstraţie. Să presupunem că mulţimea maximal consistentă Σ este astfel încât $\Sigma \vdash \varphi$, dar $\varphi \notin \Sigma$. Fie $\Gamma = \Sigma \cup \{\varphi\}$. Mulţimea Γ este, potrivit lui (4.9.1), consistentă. Dar $\Sigma \subseteq \Gamma$ şi $\Sigma \neq \Gamma$, ceea ce contrazice faptul că Γ este maximal consistentă.

(4.9.3) Σ este inconsistentă ddacă pentru o propoziţie ψ a lui *L(S)*, $\Sigma \models (\psi \wedge (\neg\psi))$.

Demonstraţie. Presupunem mai întâi că Σ este inconsistentă. Atunci pentru orice φ al lui $L(S)$, $\Sigma \vdash \varphi$. În particular, luând $\varphi = (\psi \wedge (-\psi))$, obţinem $\Sigma \vdash (\psi \wedge (-\psi))$. Presupunem acum că $\Sigma \vdash (\psi \wedge (-\psi))$. Să arătăm că pentru orice φ, $\Sigma \vdash \varphi$. Aşadar, trebuie să arătăm că există o deducţie a lui φ din Σ. Întrucât $\Sigma \vdash (\psi \wedge (-\psi))$ există o deducţie ψ_0, ... $\psi_n = (\psi \wedge (-\psi))$ a lui $(\psi \wedge (-\psi))$ din Σ. Să observăm de asemenea că $\theta = (((\psi \wedge (-\psi)) \rightarrow \varphi)$ este o tautologie. Atunci şirul ψ_0, ... ψ_n, θ, φ este o deducţie a lui φ din Σ.

(4.9.4) *Teorema deducţiei.* $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ ddacă $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \psi)$.

Vom proba numai suficienţa. Demonstraţia va fi făcută prin inducţie. Fie n cel mai mic număr pentru care există o deducţie ψ_0, ... ψ_n a lui ψ din $E \cup \{\varphi\}$. Să arătăm mai întâi că teorema are loc pentru $n = 0$. În acest caz, fie 1) $\psi = \varphi$, fie 2) ψ este o tautologie, fie 3) ψ aparţine lui Σ. În primul caz, trebuie să arătăm că $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow \varphi)$, ceea ce e adevărat fiindcă $(\varphi \rightarrow \varphi)$ este o tautologie. În al doilea şi al treilea caz, avem $\Sigma \vdash \psi$. Cum $(\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ e o tautologie, şirul

ψ, $(\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$, $(\varphi \rightarrow \psi)$

este o demonstraţie a lui $(\varphi \rightarrow \psi)$ din Σ. Fie acum $n > 0$. Faţă de cele trei cazuri, care se reiau aici ca şi pentru $n = 0$, apare un al patrulea: ψ se obţine din ψ_i şi $\psi_j = (\psi_i \rightarrow \psi)$ prin detaşare ($i < n$, $j < n$). Atât ψ_i cât şi ψ_j sunt deductibile din $\Sigma \cup \{\varphi\}$. În virtutea inducţiei, avem $(\varphi \rightarrow \psi)$ şi $(\varphi \rightarrow \psi_j) = (\varphi \rightarrow (\psi_i \rightarrow \psi))$ deductibile din Σ. Atunci şirul

$\theta_0 = (\varphi \rightarrow \psi_i)$
$\theta_1 = (\varphi \rightarrow (\psi_i \rightarrow \psi))$
$\theta_2 = ((\varphi \rightarrow \psi_i) \rightarrow ((\varphi \rightarrow (\psi_i \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)))$ (tautologie)
$\theta_3 = ((\varphi \rightarrow (\psi_i \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi))$
$\theta_4 = (\varphi \rightarrow \psi)$

este o deducţie a lui $(\varphi \rightarrow \psi)$ din Σ. Aşadar, teorema este demonstrată pentru orice număr n.

(4.9.5) Fie Σ o mulţime maximal consistentă de propoziţii ale lui $L(S)$. Atunci:

a) pentru fiecare propoziţie φ, ori $\varphi \in \Sigma$, ori $(-\varphi) \in \Sigma$;
b) pentru orice propoziţii φ şi ψ, $(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma$ ddacă $\varphi \in \Sigma$ şi $\psi \in \Sigma$;
c) pentru orice propoziţii φ şi ψ, $(\varphi \vee \psi) \in \Sigma$ ddacă $\varphi \in \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$;
d) pentru orice propoziţii φ şi ψ, $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Sigma$ ddacă sau $\varphi \notin \Sigma$ sau $\psi \in \Sigma$;
e) pentru orice propoziţii φ şi ψ, $(\varphi \leftrightarrow \psi) \in \Sigma$ ddacă $\varphi \in \Sigma$ atunci şi numai atunci când $\psi \in \Sigma$.

Vom demonstra numai cazul (a). Să presupunem că Σ e maximal consistentă şi că nici φ, nici $(-\varphi)$ nu aparţin lui Σ. Vom arăta că fie mulţimea $\Sigma \cup \{\varphi\}$, fie mulţimea $\Sigma \cup \{(-\varphi)\}$ este consistentă. Să presupunem că ambele mulţimi sunt inconsistente. Atunci, potrivit lui (4.9.3), $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash (\psi \wedge (-\psi))$ şi $\Sigma \cup \{(-\varphi)\} \vdash (\psi \wedge (-\psi))$. Potrivit teoremei deducţiei, avem $\Sigma \vdash (\varphi \rightarrow (\psi \wedge (-\psi)))$ şi $\Sigma \vdash ((-\varphi) \rightarrow (\psi \wedge (-\psi)))$. Fie $\theta_0, \ldots \theta_n$ o deducţie a lui $(\varphi \rightarrow (\psi \wedge (-\psi)))$ din Σ. Cum propoziţia $\theta_{n+1} = ((\varphi \rightarrow (\psi \wedge (-\psi))) \rightarrow (-\varphi))$ este o tautologie, şirul $\theta_0, \ldots \theta_n, \theta_{n+1}, \theta_{n+2} = (-\varphi)$ este o deducţie a lui $(-\varphi)$ din Σ şi deci $\Sigma \vdash (-\varphi)$. Analog, se arată că $\Sigma \vdash \varphi$. De aici, potrivit lui (5.9.2), avem $\varphi \in \Sigma$ şi $(-\varphi) \in \Sigma$, ceea ce contrazice faptul că Σ este consistentă. Prin urmare, sau $\Sigma \cup \{\varphi\}$, sau $\Sigma \cup \{(-\varphi)\}$ este consistentă. Să presupunem, de exemplu, că prima mulţime este consistentă. Cum $\varphi \notin \Sigma$ avem $\Sigma \subseteq \Sigma \cup \{\varphi\}$ şi $\Sigma \neq \Sigma \cup \{\varphi\}$. Dar acest lucru este imposibil, fiindcă Σ este maximală. Aşadar, supoziţia iniţială, că nici φ, nici $(-\varphi)$ nu aparţin lui Σ este falsă.

Celelalte puncte ale teoremei (4.9.5) sunt lăsate ca exerciţii.

(4.10). *Teorema lui Lindenbaum*. Orice mulţime Σ consistentă de propoziţii poate fi extinsă la o mulţime Γ maximal consistentă (altfel zis, Σ este inclusă într-o mulţime maximal consistentă de propoziţii).

Demonstraţie. Să aranjăm toate propoziţiile lui *L(S)* într-un şir $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n \ldots$ Ordinea în care punem aceste propoziţii este oarecare; singura cerinţă este ca nici o propoziţie să nu fie omisă, iar niciuna să nu apară decât o singură dată în acest şir. Vom construi acum un alt şir

$$\Sigma = \Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \ldots \subseteq \Sigma_n \subseteq \ldots$$

de mulţimi consistente de propoziţii. Mulţimile Σ_i se definesc astfel: dacă $\Sigma_0 \cup \{\varphi_0\}$ este consistentă, punem $\Sigma_1 = \Sigma_0 \cup \{\varphi_0\}$; altminteri punem $\Sigma_1 = \Sigma_0$. În pasul α, definim $\Sigma_{\alpha+1} = \Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ ddacă $\Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ este o mulţime consistentă; altminteri, $\Sigma_{\alpha+1} = \Sigma_\alpha$. Când α este un ordinal limită, punem $\Sigma_\alpha = \cup_{\beta < \alpha} \Sigma_\beta$. Definim acum mulţimea Γ : ea este reuniunea tuturor mulţimilor Σ_α. Vom arăta că 1) Γ e consistentă şi 2) Γ e maximală.

1) Să presupunem că Γ nu este consistentă. Atunci, potrivit lui (4.9.3), $\Gamma \vdash (\psi \wedge (\neg\psi))$. Conform definiţiei relaţiei $\vdash$, există o deducţie $\psi_0, \ldots \psi_n$ a lui $(\psi \wedge (\neg\psi))$ din Γ. Fie $\theta_1 \ldots \theta_n$ cele *m* propoziţii ale lui Γ care au fost folosite în această deducţie. Putem alege un α astfel încât toate acestea să aparţină lui Σ_α (acest lucru e posibil; într-adevăr, fiecare din aceste propoziţii are un loc unic determinat în şirul propoziţiilor lui *L(S)* şi putem lua pe α drept cel mai mare număr avut de cele *m* propoziţii). Dar, iarăşi potrivit lui (4.9.3), înseamnă că Σ_α este inconsistentă, ceea ce e în contradicţie cu construcţia lui Γ.

2) Să presupunem acum că Γ nu este maximală. Există în acest caz o mulțime consistentă Δ astfel încât $\Gamma \neq \Delta$ și $\Gamma \subseteq \Delta$. Fie un $\varphi_\alpha \in \Delta$, care nu aparține lui Γ. Atunci $\Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ (care e inclusă în Δ) este consistentă și deci $\Sigma_{\alpha+1} = \Sigma_\alpha \cup \{\varphi_\alpha\}$ este consistentă. Dar $\Sigma_{\alpha+1} \subseteq \Gamma$ și deci $\varphi_\alpha \in \Gamma$, în contradicție cu supoziția făcută.

Odată cu demonstrarea teoremei lui Lindenbaum, să părăsim abordarea sintactică. Vom construi pandantul semantic al relației: φ implică logic ψ sau, mai în general, ψ se deduce din Σ.

Fie din nou Σ o mulțime de propoziții ale lui *L(S)*. Vom spune că *M* este un *model al lui* Σ, simbolic $M \models \Sigma$, ddacă orice propoziție din Σ este adevărată în *M* (deci, *M* este model pentru orice propoziție din Σ). Mulțimea Σ este *realizabilă* ddacă are cel puțin un model. Aceste noțiuni ne permit acum să formulăm cea mai importantă teoremă a teoriei modelelor pentru logica propozițiilor: teorema generalizată a completitudinii. Teorema furnizează un criteriu pentru a determina când o mulțime de propoziții este realizabilă. Să notăm de asemenea că teorema leagă între ele (prin raportul: dacă și numai dacă) condiții de natură sintactică și condiții de natură semantică.

(4.11) *Teorema generalizată a completitudinii.* O mulțime Σ de propoziții ale lui *L(S)* este consistentă ddacă este realizabilă.

Demonstrația are două părți:

1) Necesitatea. Să presupunem că Σ este realizabilă și să arătăm că este consistentă. Fie M un model pentru care $M \models \Sigma$. Vom arăta că orice propoziție care este deductibilă din Σ este adevărată în *M*. Fie $\psi_0, \ldots \psi_n = \varphi$ o deducție a unei propoziții φ din Σ. Fie $m < n$. Dacă $\psi_m \in \Sigma$, atunci ψ_m este adevărată în *M*, conform supoziției. De asemenea, potrivit teoremei de corectitudine (3.5), dacă ψ_m este o tautologie, atunci e adevărată în *M*. Iar dacă ψ_m e obținută din două propoziții ψ_i și $(\psi_i \rightarrow \psi_m)$ adevărate în *M*, atunci evident că și ψ_m este adevărată în *M*. Decurge de aici, prin inducție, că toate propozițiile $\psi_0, \ldots \psi_n$ sunt adevărate în *M*. Așadar, orice propoziție, dacă este deductibilă din Σ, este adevărată în *M*. Dar dacă Σ ar fi inconsistentă, atunci $(\varphi \wedge (\neg\psi))$ ar fi deductibilă din Σ – și, deci, ar fi adevărată în *M*. Dar nici o propoziție de forma $(\psi \wedge (\neg\psi))$ nu poate fi adevărată în *M*. Așadar, Σ e consistentă.

2) Suficiența. Să presupunem că Σ e consistentă. Trebuie să arătăm că Σ e realizabilă. Întrucât Σ e consistentă, potrivit teoremei lui Lindenbaum, putem să o extindem la o mulțime Γ maximal consistentă. Acum construim un model *M* al lui Γ și deci al lui Σ. Fie *M* mulțimea literelor propoziționale $p \in S$ care au proprietatea că $p \in \Gamma$. Prin inducție, se arată că pentru orice propoziție φ

(i) $\varphi \in \Gamma$ ddacă $M \models \varphi$.

Într-adevăr, prin definiţie (i) are loc când φ este literă propoziţională. Expresia (4.9.5) punctul (a) garantează că dacă (i) are loc pentru $\varphi = \psi$, atunci (i) va avea loc şi dacă luăm $\varphi = (-\psi)$; punctul (b) garantează că dacă (i) are loc pentru $\varphi = \psi$ şi pentru $\varphi = \chi$, atunci are loc şi pentru $\varphi = (\psi \wedge \chi)$ – şi la fel pentru celelalte trei cazuri. Din (i) decurge că M este un model al lui Γ, în simboluri $M \models \Gamma$; şi cum $\Sigma \subseteq \Gamma$, înseamnă că $M \models \Sigma$. Aşadar, Σ are un model şi este, deci, realizabilă, q.e.d.

Acum putem introduce relaţia semantică $\Sigma \models \varphi$, corespunzătoare relaţiei sintactice $\Sigma \vdash \varphi$ (φ este deductibilă din Σ). Vom spune că φ este o consecinţă a lui Σ, în simboluri $\Sigma \models \varphi$, ddacă orice model al lui Σ este şi model al lui φ. Raportul dintre relaţiile de deductibilitate şi de consecinţă este dat de următoarea teoremă:

(4.12) $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \models \varphi$.

Vom demonstra această teoremă în paragraful următor, folosind teorema de compactitate. Cititorul va putea să o demonstreze însă ca exerciţiu chiar acum, apelând la noţiunile deja introduse. Să notăm însă aici câteva consecinţe imediate ale teoremei (5. 12). Spunem că φ este o *consecinţă* a lui ψ ddacă orice model al lui ψ este şi model al lui φ, simbolic $\psi \models \varphi$. Se observă imediat că definiţia relaţiei $\psi \models \varphi$ se obţine din cea a relaţiei $\Sigma \models \varphi$ punând $\Sigma = \{\psi\}$. De asemenea, spunem că două propoziţii φ şi ψ sunt *semantic echivalente*, în simboluri $\varphi =| \models \psi$, ddacă au aceleaşi modele. Este evident că

$\varphi =| \models \psi$ ddacă $\varphi \models \psi$ şi $\psi \models \varphi$.

Din (4.12) decurge că

(4.13) $\psi \vdash \varphi$ ddacă $\psi \models \varphi$.

Să demonstrăm acum un corespondent semantic pentru teorema deducţiei:

(4.14) $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$ ddacă $\Sigma \models (\varphi \rightarrow \psi)$

Demonstraţie:

1) Necesitatea. Să presupunem că $\Sigma \models (\varphi \rightarrow \psi)$. Fie un model M al lui $\Sigma \cup \{\varphi\}$. Atunci M este şi un model al lui Σ. Potrivit presupunerii, în M este adevărată propoziţia $(\varphi \rightarrow \psi)$. Dar, întrucît M este model al lui $\Sigma \cup \{\varphi\}$, înseamnă că φ este adevărată în M. În consecinţă, ψ e adevărată în M, q.e.d.

2) Suficienţa. Să presupunem că $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi$. Fie un model M al lui Σ. Trebuie să arătăm că M este un model şi pentru $(\varphi \rightarrow \psi)$. Dacă M nu este model pentru $(\varphi \rightarrow \psi)$, atunci $M \models (-(\varphi \rightarrow \psi))$, deci $M \models (\varphi \wedge (-\psi))$. Aşadar, M este un model pentru φ şi este un model pentru $(-\psi)$. Fiind şi model pentru φ, M este un model pentru $\Sigma \cup \{\varphi\}$. Atunci însă, conform presupunerii

făcute, M este şi un model pentru ψ. Dar aceasta contrazice faptul că $M \models (\neg\psi)$, q.e.d.

Dacă în (4.14) luăm pe Σ ca mulţimea vidă, obţinem:

(4.15) $\varphi \models \psi$ ddacă $\models (\varphi \rightarrow \psi)$

şi deci, din această teoremă şi (4.13), decurge că

(4.16) $\varphi \vdash \psi$ ddacă $\models (\varphi \rightarrow \psi)$

În sfârşit, ţinând cont de definiţia relaţiei de echivalenţă semantică avem:

(4.17) φ este semantic echivalentă cu ψ ($\varphi =| \models \psi$) ddacă $\models (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

§ 5. Teorema de compactitate

Teorema de compactitate este o proprietate remarcabilă a logicii propoziţiilor, precum şi a logicii de ordinul întâi a predicatelor. Ea este prima teoremă de caracterizare a unor logici pe care o întâlnim. Compactitatea este o proprietate *pur semantică*, în sensul că nu face apel la nici o noţiune sintactică. Sensul teoremei este următorul: problema pe care ne-o punem e aceea de a afla când este realizabilă o mulţime Σ de propoziţii. Dacă Σ este finită, răspunsul e simplu: fie $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots \varphi_n\}$. Potrivit definiţiei (2.2), conjuncţia

$(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge (\ldots \wedge \varphi_n)\ldots)$

este o propoziţie ψ. Σ este realizabilă când există un model în care sunt adevărate toate elementele sale. Dar, potrivit definiţiei (3.2), puntul (c), Σ este adevărată în M dacă propoziţiile $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ sunt simultan adevărate în M. Aşadar, Σ este realizabilă dacă propoziţia ψ (= conjuncţia tuturor propoziţiilor din Σ) este realizabilă.

Dacă însă mulţimea Σ este infinită, nu mai putem proceda la fel, fiindcă nu putem construi o conjuncţie infinită. Într-adevăr, potrivit lui (2.2), numai şiruri finite de simboluri ale lui $L(S)$ sunt propoziţii. Teorema de compactitate oferă însă aici un răspuns: să considerăm toate submulţimile *finite* ale lui Σ. Dacă Σ este infinită, ea are desigur infinit de multe submulţimi şi are infinit de multe submulţimi infinite. Dar teorema de compactitate spune că nu este nevoie să luăm în considerare decât submulţimile finite ale lui Σ pentru a determina dacă aceasta este sau nu realizabilă. Să admitem acum că *fiecare* astfel de submulţime este realizabilă, deci are un model. Desigur, două submulţimi finite ale lui Σ pot să aibă modele diferite, şi e posibil ca un model M să fie model pentru unele, dar nu şi pentru alte submulţimi finite ale lui Σ. Dar dacă fiecare submulţime finită a lui Σ are un model al ei, atunci teorema de compactitate ne asigură că există şi un model pentru Σ ca întreg, deci că şi Σ este realizabilă.

Vom spune că o mulţime Σ este *finit realizabilă* ddacă orice submulţime finită a lui Σ este realizabilă. Desigur, dacă Σ este finită ea nu are decât submulţimi finite şi deci ea este finit realizabilă dacă este realizabilă. Teorema de compactitate extinde această proprietate pentru orice mulţime Σ, finită sau infinită:

(6.1) *Teorema de compactitate.* Σ este finit realizabilă ddacă Σ este realizabilă.

Demonstraţie:

1) Necesitatea. Demonstraţia este trivială. Într-adevăr, dacă Σ este realizabilă, înseamnă că există un model M în care sunt adevărate toate propoziţiile din Σ. Fie Γ o submulţime finită a lui Σ. Desigur, în M sunt adevărate toate propoziţiile din Γ, deci $M \models \Gamma$, adică Γ este realizabilă.

2) Suficienţa. Să presupunem că Σ este finit realizabilă, dar Σ nu este realizabilă. Atunci, potrivit teoremei generalizate a completitudinii – teorema (4.11) – Σ este inconsistentă. Deci $\Sigma \vdash (\psi \wedge (-\psi))$. Există prin urmare o deducţie $\psi_0, \ldots \psi_n$ a lui $(\psi \wedge (-\psi))$ din Σ în care sunt folosite, alături de tautologii, m propoziţii din Σ ($m \leq n$). Fie Γ această submulţime a lui Σ. Evident, Γ este finită. Cum $\Gamma \vdash (\psi \wedge (-\psi))$, înseamnă că este inconsistentă. Iarăşi potrivit teoremei generalizate a completitudinii, înseamnă că Γ nu este realizabilă, şi deci o submulţime finită a lui Σ nu este realizabilă, ceea ce încalcă supoziţia făcută, q.e.d.

Acum este posibil să demonstrăm propoziţia (4.12): $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \models \varphi$. Să observăm că dacă Σ este inconsistentă, atunci potrivit teoremei generalizate a completitudinii, ea nu este realizabilă, deci nu are nici un model. Atunci oricare ar fi propoziţia φ, e adevărat că $\Sigma \models \varphi$ (căci această relaţie revine la: oricare ar fi modelul M, dacă $M \models \Sigma$, atunci $M \models \varphi$, iar antecedentul implicaţici e fals). Pe de altă parte, potrivit definiţiei inconsistenţei, întrucât Σ e inconsistentă, avem $\Sigma \vdash \varphi$, oricare ar fi propoziţia φ. Aşadar în acest caz teorema (4.12) este trivial adevărată. Să presupunem acum că Σ este consistentă.

1) Necesitatea. Să presupunem că φ e o consecinţă a lui Σ, dar că φ nu este deductibilă din Σ. Atunci nu există nici o deducţie $\psi_0, \ldots \psi_n = \varphi$ a lui φ din Σ. Cum în $\psi_0, \ldots \psi_n$ apar un număr finit de propoziţii din Σ – fie Γ mulţimea acestora – înseamnă că nu există nici o submulţime finită Γ a lui Σ astfel încât $\Gamma \vdash \varphi$. Aceasta înseamnă că pentru fiecare astfel de mulţime Γ, mulţimea $\Gamma \cup \{(-\varphi)\}$ nu este neconsistentă; altfel zis, $\Gamma \cup \{(-\varphi)\}$ este consistentă, oricare ar fi submulţimea finită Γ a lui Σ. Potrivit teoremei generalizate a completitudinii, $\Gamma \cup \{-\varphi)\}$ este realizabilă, oricare ar fi submulţimea finită Γ a lui Σ. Să observăm acum că aceste mulţimi sunt submulţimile finite ale mulţimii $\Sigma \cup \{(-\varphi)\}$. Aplicând teorema de compactitate, înseamnă că mulţimea $\Sigma \cup \{-\varphi)\}$ are un model M. Dar întrucât φ este o consecinţă a lui Σ, înseamnă

că avem în acest caz $M \models \Sigma$ şi $M \models \varphi$, ceea ce contrazice faptul că M, fiind un model pentru $\Sigma \cup \{(\neg\varphi)\}$, este un model şi pentru $(\neg\varphi)$.

2) Suficienţa. Să presupunem că $\Sigma \vdash \varphi$ şi că M este un model al lui Σ. În demonstraţia teoremei (4.11), partea care viza necesitatea, am arătat că dacă $M \models \Sigma$, atunci orice propoziţie deductibilă din Σ este adevărată în M. Aşadar, $M \models \varphi$. Prin urmare, întrucât M este oarecare, avem: orice model al lui Σ este un model al lui φ, adică $\Sigma \models \varphi$, q.e.d.

Alături de teorema de compactitate, un al doilea rezultat fundamental în logica propoziţiilor este teorema lui Craig. Descoperită în 1957, teorema este cel mai recent şi, după unii autori, ultimul rezultat fundamental asupra logicii propoziţiilor. Teorema poate fi formulată în două variante, sintactică şi semantică; însă, ţinând seamă de teoremele de completitudine (în particular, de (4.13)), cele două variante sunt echivalente. Să notăm de asemenea că rezultatul lui Craig poartă numele de teorema *interpolării*. Într-adevăr, teorema arată că, ori de câte ori o propoziţie φ implică o altă propoziţie ψ, există un interpolant, adică o a treia propoziţie care se aşează între cele două, între antecedent şi consecvent; există deci un χ, care e implicat de φ, dar implică pe χ. Teorema lui Craig arată care sunt condiţiile îndeplinite de această nouă propoziţie χ.

(5.2.1) *Teorema de interpolare a lui Craig; varianta semantică.* Dacă $\varphi \models \psi$, atunci există o propoziţie χ astfel încât $\varphi \models \chi$ şi $\chi \models \psi$ şi orice literă propoziţională care apare în χ apare atât în φ cât şi în ψ.

(5.2.2) *Teorema de interpolare a lui Craig; varianta sintactică.* Dacă $\varphi \vdash \psi$, atunci există o propoziţie χ astfel încât $\varphi \vdash \chi$ şi $\chi \vdash \psi$ şi orice literă propoziţională care apare în χ apare atât în φ cât şi în ψ.

Vom da demonstraţia pentru varianta semantică (5.2.1). Să notăm cu $S_1 \subseteq S$ mulţimea literelor propoziţionale care apar în φ şi cu $S_2 \subseteq S$ mulţimea literelor propoziţionale care apar în ψ; evident, literele propoziţionale care apar în χ sunt elemente ale mulţimii $S_1 \cap S_2 \subseteq S$. Mulţimile S_1, S_2, $S_1 \cap S_2$ sunt desigur finite. Să presupunem că $S_1 \cap S_2$ are k elemente. Să ne amintim că un model M este o submulţime a lui S. Atunci modelul $M^+ = M \cap (S_1 \cap S_2)$ este tot o submulţime a lui S. Mai mult, întrucât $M \cap (S_1 \cap S_2) \subseteq S_1 \cap S_2$, înseamnă că M^+ este o submulţime a lui $S_1 \cap S_2$. Cum $S_1 \cap S_2$ are k elemente, există 2^k submulţimi ale sale şi deci există 2^k modele de tip M^+.

Fie acum $p_1, \ldots p_k$ propoziţiile din $S_1 \cap S_2$ şi fie un model oarecare M în care propoziţia φ este adevărată. Să construim o conjuncţie de k elemente $\chi_i = (\theta_1 \wedge (\theta_2 \ldots \wedge \theta_k)\ldots)$ astfel: dacă p_m $(1 \leq m \leq k)$ aparţine lui M^+, atunci $\theta_m = p_m$; dacă $p_m \notin M^+$, atunci $\theta_m = (\neg p_m)$. Acum construim pe

χ ca disjuncţia tuturor propoziţiilor χ_i. Întrucât există 2^k modele M^+, propoziţia φ este adevărată în cel mult 2^k modele M^+ şi deci în $\chi = \chi_1 \vee \chi_2 \vee \chi_3 \ldots \chi_n$, $n \leq 2^k$.

Trebuie să arătăm că $\varphi \models \chi$ şi $\chi \models \psi$.

1) $\varphi \models \chi$, adică pentru orice model M, ddacă $M \models \varphi$, atunci $M \models \chi$. Să admitem că M este un model pentru φ. Să arătăm că M este un model şi pentru χ. Într-adevăr, întrucât $M \models \varphi$, avem şi $M^+ \models \varphi$. Atunci, potrivit definiţiei lui χ, avem $M^+ \models \chi$. Dar următoarea lemă poate fi probată foarte uşor:

(5.3) Dacă $M \models \chi$ şi nici o literă propoziţională care apare în χ nu aparţine mulţimii S', atunci $M \cup S' \models \chi$.

Pentru aceasta, folosim propoziţia (3.4). Fie χ astfel încât toate literele propoziţionale care apar în χ se află printre $p_0, \ldots p_n$. Să presupunem că valoarea lui χ pentru atribuirea $a_0, \ldots a_n$ este t. Construim acum un model M astfel: dacă în $a_0, \ldots a_n$, a_i este t, atunci $p_i \in M$; dacă a_i este f, atunci $p_i \notin M$. Propoziţia (4.8) ne dă $M \models \chi$. Fie acum o mulţime S' de litere propoziţionale $p_{n+1}, \ldots p_{n+m} \ldots$ care sunt diferite de $p_0, \ldots p_n$. Construim atribuirea $a_0, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots a_{n+m} \ldots$ Ei îi facem să-i corespundă un model $M \cup S'$ astfel: dacă $o \leq i \leq n$, atunci $p_i \in M \cup S'$ ddacă $p_i \in M$; dacă $i > n$, atunci $p_i \in M \cup S'$ ddacă a_i este t. Potrivit propoziţiei (3.4), valoarea lui χ pentru atribuirea $a_0, \ldots a_n, a_{n+1}, \ldots a_{n+m} \ldots$ este t; apelând din nou la propoziţia (3.8), obţinem $M \cup S' \models \chi$, q.e.d.

Să observăm acum că mulţimea $M - M^+$ nu cuprinde nici o literă propoziţională care apare în χ. Aşadar, putem folosi lema (5.3) pentru a obţine $M \cup (M - M^+) \models \chi$. Dar, desigur, $M \cup (M - M^+) = M$ şi deci $M \models \chi$, q.e.d.

2) $\chi \models \psi$, adică pentru orice model M, dacă $M \models \chi$, atunci $M \models \psi$. Să presupunem că M este astfel încât $M \models \chi$. Atunci $M^+ \models \chi$. Într-adevăr să observăm că, folosind teoremele (3.4) şi (3.8), putem demonstra analog lui (5.3) că:

(5. 4) Dacă $M \cup S' \models \chi$ şi nici o literă propoziţională din χ nu apare în S', atunci $M \models \chi$.

. (Exerciţiu: plecând de la (5.3), să se demonstreze (5.4) cu ajutorul logicii propoziţiilor şi al definiţiei (3.2) a modelului).

Dacă în (5.4) luăm pe M inclus în mulţimea $S_1 \cap S_2$, deci M va cuprinde doar litere propoziţionale care apar în χ, atunci $M^+ = M$ şi $(M \cup S')^+ = M$. Acum, dacă $M^+ \models \chi$, există (conform construcţiei lui χ) un model M' astfel încât $M'^+ = M^+$ şi $M' \models \varphi$. Putem, potrivit lemei (5.4), să-l luăm pe M' astfel încât mulţimea M' să nu cuprindă decât litere propoziţionale din S_1, deci $M' \subseteq S_1$. Fie M'' mulţimea literelor propoziţionale din M care nu fac parte

din S_1 (deci, care apar în ψ, dar nu şi în φ). Atunci e îndeplinită condiţia din (5.3) şi avem $M' \cup M'' \models \varphi$. Cum, prin ipoteză, $\varphi \models \psi$, înseamnă că vom avea de asemenea $M' \cup M'' \models \psi$.

Să observăm de asemenea că mulţimea $M' \cup M''$ cuprinde toate literele propoziţionale din S_2 care aparţin lui M. Într-adevăr, cele care sunt comune lui S_1 şi S_2 apar în M^+ şi deci şi în M', iar cele care aparţin numai lui S_2 sunt cuprinse în M''. Fie S'' mulţimea literelor propoziţionale din $M' \cup M''$ care nu fac parte din S_2 (deci nu apar în propoziţia ψ). Atunci, aplicând lema (5.4), obţinem:

$(M' \cup M'') - S'' \models \psi$.

Să notăm cu M''' acest nou model $(M' \cup M'') - S''$. În sfârşit, să construim mulţimea literelor propoziţionale din M care nu apar în M'''. Ele fie aparţin lui S_1, fie nu aparţin nici lui S_1 şi nici lui S_2. Să notăm cu M'''' această mulţime. Evident, putem aplica acum lema (5.3) pentru a obţine

$M''' \cup M'''' \models \psi$,

Dar $M''' \cup M''''$ este exact mulţimea M, deci $M \models \psi$. Aşadar, am arătat că, pentru un model oarecare M, dacă acesta este un model al lui χ, este şi model al lui ψ. Deci $\chi \models \psi$, q.e.d.

În continuare vom introduce câteva noţiuni care, în cele ce urmează, vor avea un rol remarcabil.

Să observăm că fiecărei propoziţii φ a lui $L(S)$ putem face să-i corespundă o mulţime de modele unic determinată: mulţimea Φ a modelelor în care propoziţia φ este adevărată. Vom spune că Φ este judecata exprimată de propoziţia φ. Problema este însă următoarea: dacă fiecărei propoziţii îi corespunde o mulţime de modele (o judecată), este adevărat şi invers, anume că fiecărei mulţimi de modele îi corespunde o propoziţie, anume propoziţia care are *exact* acele modele? Răspunsul este negativ: există mulţimi de modele care nu reprezintă mulţimea modelelor unei propoziţii. Într-adevăr, să considerăm situaţia când mulţimea S a literelor propoziţionale are un număr infinit (numărabil) de elemente. Atunci, potrivit definiţiei propoziţiilor, mulţimea acestora este tot infinit numărabilă. Dar există tot atâtea modele câte submulţimi are mulţimea S. Şi, potrivit teoremei lui Cantor, mulţimea acestor submulţimi ale lui S este infinit nenumărabilă. Aceasta înseamnă, pur şi simplu, că mulţimile de modele sunt „mai multe" decât propoziţiile şi, deci, nu putem să ataşăm fiecărei mulţimi de modele o propoziţie a lui $L(S)$, astfel încât unor mulţimi diferite să le ataşăm propoziţii diferite.

Vom spune că o mulţime de modele este *elementară* ddacă există o propoziţie φ astfel încât X este mulţimea modelelor lui φ, în simboluri: $M \models \varphi$ ddacă

$M \in X$. În general, vom spune că X este *elementară în sens larg* ddacă există o mulţime Σ de propoziţii astfel încât X este mulţimea modelelor lui Σ. În simboluri,

$M \models \Sigma$ ddacă $M \in X$.

În cele ce urmează vom menţiona câteva aplicăţii ale teoremelor de completitudine şi compactitate. Vom introduce noţiunea formală de teorie şi vom defini câteva dintre trăsăturile logice ale teoriilor.

O *teorie* (în $L(S)$) este o mulţime Σ de propoziţii (ale lui $L(S)$). O teorie este *închisă* în raport cu relaţia de implicaţie logică ddacă ea conţine orice propoziţie pe care o implică. Sintactic, aceasta revine la a spune că o teorie este închisă ddacă ea conţine orice propoziţie deductibilă din ea; în simboluri, Σ este închisă ddacă din $\Sigma \vdash \varphi$ decurge că $\varphi \in \Sigma$.

(5.5) Fie Σ o teorie închisă. Atunci propoziţia φ aparţine lui Σ ddacă φ este o consecinţă a lui Σ, în simboluri: $\varphi \in \Sigma$ ddacă $\Sigma \models \varphi$.

Demonstraţie. Mai întâi să presupunem că $\varphi \in \Sigma$. Atunci φ este evident o consecinţă a lui Σ : $\Sigma \models \varphi$. Să presupunem acum că φ este o consecinţă a lui Σ. Potrivit teoremei (4.12), rezultă că φ este deductibilă din Σ şi deci, din definiţia teoriei închise, $\varphi \in \Sigma$.

În cele ce urmează vom presupune că toate teoriile sunt închise.

(5.6) O teorie Σ este *contradictorie* ddacă ea cuprinde orice propoziţie.

De aici se obţine imediat: o teorie este *consistentă* ddacă nu este contradictorie. Aplicând teorema de completitudine, obţinem: o teorie este consistentă ddacă are un model.

Vom analiza două proprietăţi mai importante ale teoriilor: *axiomatizabilitatea* şi *completitudinea*. Să începem cu a doua.

O teorie Σ este *completă* ddacă oricare ar fi propoziţia φ, sau $\Sigma \models \varphi$, sau $\Sigma \models (-\varphi)$, nu însă ambele. Este evident că potrivit acestei definiţii, orice teorie completă este necontradictorie. Într-adevăr, dacă Σ ar fi contradictorie, atunci am avea $\Sigma \vdash (\varphi \wedge (-\varphi))$ şi deci $\Sigma \vdash \varphi$ şi $\Sigma \vdash (-\varphi)$. Aplicând teorema (4.12), obţinem: $\Sigma \models \varphi$ şi $\Sigma \models (-\varphi)$, ceea ce intră în contradicţie cu definiţia teoriei complete.

Teoriile complete pot fi caracterizate atât în termeni sintactici, cât şi în termeni semantici. Teorema care urmează explicitează acest lucru: condiţia (b) este sintactică, iar (c) este semantică. Cum se va vedea uşor, pentru a demonstra această teoremă teoremele de completitudine sunt esenţiale.

(5.7) Următoarele condiţii sunt echivalente:

a) Σ este o teorie completă.

b) Mulţimea propoziţiilor deductibile din Σ este maximal consistentă.

c) Σ este exact un model.

Pentru a demonstra pe (5.7), arătăm că: (a) implică (b), (b) implică (c), iar (c) implică (a). Decurge de aici că cele trei condiţii sunt echivalente.

Să presupunem mai întâi că Σ este completă. Potrivit teoremei (4.12), oricare ar fi propoziţia φ, $\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash (-\varphi)$, dar nu şi ambele. Fie Γ mulţimea propoziţiilor deductibile din Σ. Evident, Γ este o teorie consistentă. Să arătăm că Γ este maximală. Vom admite că există o altă mulţime consistentă Γ', care cuprinde pe Γ. Fie $\varphi \in \Gamma$. Cum Γ este consistentă, nu avem $(-\varphi) \in \Gamma$. Dar, cum pentru orice φ, $\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash (-\varphi)$ înseamnă că $\varphi \in \Gamma$ sau $(-\varphi) \in \Gamma$. Însă nu e posibil ca $(-\varphi)$ să aparţină lui Γ, căci atunci, deoarece Γ e inclus în Γ', ar trebui să avem şi $(-\varphi) \in \Gamma'$, ceea ce am văzut că nu e cazul. Aşadar, $\varphi \in \Gamma$ şi deci $\Gamma = \Gamma'$, ceea ce probează că Γ este maximală.

Să presupunem acum că Γ este o mulţime maximal consistentă şi să arătăm că Σ are exact un model. Într-adevăr, dacă $M \models \Sigma$, atunci $M \models \Gamma$. Dacă există şi un alt model M' al lui Σ, atunci de asemenea $M' \models \Gamma$. Presupunem că M este diferit de M'; atunci există o propoziţie φ astfel încât M este un model pentru φ, deci $M \models \varphi$, dar φ este falsă în M', deci $M' \models (-\varphi)$. Dar Γ fiind maximal consistentă, fie $\varphi \in \Gamma$, fie $(-\varphi) \in \Gamma$. De pildă, în primul caz, cum $M' \models \Gamma$, avem $M' \models \varphi$. Însă acest fapt contrazice pe $M' \models (-\varphi)$. Iar dacă $(-\varphi) \in \Gamma$, atunci vom avea $M \models (-\varphi)$, ceea ce iarăşi nu este posibil.

În sfârşit, trebuie arătat că dacă Σ are exact un model, atunci este completă. Demonstraţia o lăsăm ca exerciţiu.

Vom trece acum la problema axiomatizabilităţii teoriilor. Spunem că o mulţime Δ de propoziţii este o *mulţime de axiome* pentru o teorie Σ ddacă Δ şi Σ au aceleaşi consecinţe. Aplicând teoreme de completitudine (5.12), obţinem imediat următoarea caracterizare alternativă:

(5.8) Δ este o mulţime de axiome pentru teoria Σ ddacă din Δ sunt deductibile aceleaşi propoziţii ca din Σ, în simboluri $\Delta \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi$.

Lui (5.8) i se poate ataşa un corespondent semantic:

(5.9) Δ este o mulţime de axiome pentru teoria Σ ddacă Δ şi Σ au aceleaşi modele.

Demonstraţie: 1) Necesitatea. Să presupunem că Σ şi Δ au aceleaşi modele. Fie o consecinţă φ a lui Σ : $\Sigma \models \varphi$; deci, pentru orice model M, dacă M este un model al lui Σ, atunci M este un model al lui φ, în simboluri: dacă $M \models \Sigma$, atunci $M \models \varphi$. Dar, conform supoziţiei, pentru orice model M, $M \models \Sigma$ ddacă $M \models \Delta$. Deci, pentru orice model M, dacă $M \models \Delta$, atunci $M \models \varphi$, adică $\Delta \models \varphi$. Analog, se demonstrează că dacă φ e o consecinţă a lui Δ, atunci φ e consecinţă a lui Σ. Aşadar, Δ şi Σ au aceleaşi consecinţe.

2) Suficienţa. Fie Δ o mulţime de axiome pentru Σ şi să presupunem că există un model M astfel încât $M \models \Sigma$, dar nu este adevărat că $M \models \Delta$. Aceasta înseamnă că există o propoziţie φ din Δ astfel încât nu e adevărat că $M \models \varphi$, deci $M \models (-\varphi)$. Dar, dacă φ aparţine lui Δ, atunci evident $\Delta \vdash \varphi$ şi, conform teoremei de completitudine, $\Delta \models \varphi$. Însă cum Δ este o mulţime de axiome pentru Σ, înseamnă că $\Sigma \models \varphi$. Adică, oricare ar fi modelul M al lui Σ, avem $M \models \varphi$. Or, am admis mai devreme că există un model M al lui Σ pentru care $M \models (-\varphi)$ ceea ce duce la constradicţie, q.e.d.

Desigur că o mulţime de axiome pentru o teorie Σ este, potrivit definiţiei de mai sus, Σ însăşi. De obicei, noi căutăm să găsim însă mulţimi de axiome cu mai puţine elemente decât Σ, eventual mulţimi finite de axiome. Vom spune că o teorie Σ este *finit axiomatizabilă* ddacă ea are o mulţime finită de axiome. Să observăm că dacă Δ este o mulţime finită de axiome pentru Σ, atunci putem forma conjuncţia tuturor propoziţiilor din Δ. Ca urmare, această unică propoziţie formează o mulţime de axiome pentru Σ şi, deci, avem:

(5.10) O teorie Σ este finit axiomatizabilă ddacă are o singură axiomă.

Un rezultat mai puţin trivial este următorul:

(5.11) Fie Σ_1 şi Σ_2 două teorii, astfel încât mulţimea modelelor lui Σ_1 este complementara mulţimii modelelor lui Σ_2. Atunci atât Σ_1 cât şi Σ_2 sunt finit axiomatizabile.

Demonstraţie. Cele două teorii îndeplinesc condiţia: dacă $M \models \Sigma_1$ atunci nu e adevărat că $M \models \Sigma_2$; şi dacă nu e adevărat că $M \models \Sigma_1$, atunci $M \models \Sigma_2$. Nu există aşadar un model comun celor două teorii, ceea ce înseamnă că teoria $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. nu este realizabilă. Conform teoremei de compactitate, $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ nu este nici finit realizabilă. Putem alege deci nişte mulţimi finite $\Delta_1 \subseteq \Sigma_1$ şi $\Delta_2 \subseteq \Sigma_2$ astfel încât $\Delta_1 \cup \Delta_2$ să nu fie realizabilă. Fie acum un model M al lui $L(S)$. Dacă $M \models \Delta_1$, înseamnă că M nu este model pentru Δ_2 şi prin urmare M nu este model pentru Σ_2. Dar atunci M este un model al lui Σ_1, adică $M \models \Sigma_1$. Pe de altă parte, evident că dacă M' e un model pentru Σ_1, atunci M' este model pentru Δ_1. Decurge de aici că Σ_1 şi Δ_1 au aceleaşi modele şi, prin intermediul lui (5.9), că Δ_1 este o mulţime finită de axiome pentru Σ_1. La fel se arată că Δ_2 este o mulţime finită de axiome pentru Σ_2, q.e.d.

În demonstrarea lui (5.11) am folosit teorema de compactitate. Ea va interveni de asemenea şi în demonstrarea următoarelor două teoreme (5.12) şi (5.13). Aceste teoreme stabilesc legături între relaţii semantice – anume, relaţii între modele -- şi proprietăţi sintactice ale propoziţiilor. Să începem prin a defini două astfel de proprietăţi sintactice:

1) O propoziţie φ este *pozitivă* ddacă ea e construită din litere propoziţionale folosind doar disjuncţia şi conjuncţia. De exemplu, propoziţia $(p \wedge ((q \vee r) \wedge p))$ este pozitivă, în timp ce $(-p)$ şi $(p \leftrightarrow q)$ nu sunt pozitive.

2) O propoziţie φ este *condiţională* ddacă ea este o conjuncţie $(\varphi_1 \wedge (... \varphi_n)...)$, iar fiecare φ_i este sau o literă propoziţională, sau o implicaţie de forma $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (... \rightarrow p_m)...)$ ori de forma $(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (... \rightarrow - p_m)...)$

Semantic, să formulăm următoarele definiţii:

1) O teorie Σ este *crescătoare* ddacă ori de câte ori $M \models \Sigma$ şi $M \subseteq M'$, atunci $M' \models \Sigma$.

2) O teorie Σ este *închisă faţă de intersecţii* ddacă ori de câte ori $M \models \Sigma$ şi $M' \models \Sigma$, atunci, $M \cap M' \models \Sigma$.

Aşadar, o teorie este crescătoare când este adevărată în toate modelele care cuprind un model în care ea e adevărată; şi e închisă faţă de intersecţii ddacă e adevărată în modelul intersecţie a două modele în care e adevărată.

Teoremele care urmează leagă între ele aceste noţiuni sintactice şi semantice:

(5.12) O teorie consistentă Σ este crescătoare ddacă are o mulţime de axiome pozitive.

(5.13) O teorie Σ e închisă faţă de intersecţii ddacă are o mulţime de axiome condiţionale.

Vom demonstra doar propoziţia (5.12).

1) Necesitatea. Să presupunem că Σ este consistentă şi că are o mulţime Δ de axiome pozitive. Fie un model M al lui Σ. Atunci M este un model şi pentru Δ, potrivit teoremei (5.9). Fie un model M' astfel încât $M \subseteq M'$. Să arătăm că orice propoziţie φ pozitivă dacă e adevărată în M, atunci este adevărată şi în M'. Demonstraţia se face prin inducţie asupra structurii lui φ. Mai întâi, dacă φ este o literă propoziţională, iar $M \models \varphi$, înseamnă că $\varphi \in M$ şi deci $\varphi \in M'$, adică $M' \models \varphi$. Să presupunem acum că pentru propoziţiile ψ_1 şi ψ_2 această proprietate e satisfăcută. Să arătăm că va fi satisfăcută şi pentru $\varphi \models (\psi_1 \vee \psi_2)$ şi pentru $\varphi = (\psi_1 \wedge \psi_2)$. În primul caz, ddacă $M \models \varphi$, atunci $M \models \psi_1$ sau $M \models \psi_2$. Ca urmare, $M' \models \psi_1$ sau $M' \models \psi_2$, ceea ce (potrivit definiţiei modelului) implică $M' \models (\psi_1 \vee \psi_2)$, adică $M' \models \varphi$. În al doilea caz, dacă $M \models \varphi$, atunci $M \models \psi_1$ şi $M \models \psi_2$. Aşadar, prin inducţie $M' \models \psi_1$ şi $M' \models \psi_2$, şi deci $M' \models (\psi_1 \wedge \psi_2)$, adică $M' \models \varphi$, q.e.d.

Dar orice propoziţie dir Δ este pozitivă şi, în plus, e adevărată în M. Atunci $M' \models \varphi$ pentru orice propoziţie φ din Δ, adică $M' \models \Sigma$. Însă, conform lui (5.9), orice model al lui Δ este model şi al lui Σ, deci M' e model al lui Σ – şi deci această teorie este crescătoare.

2) Suficienţa. Să presupunem că Σ este o teorie consistentă şi crescătoare. Fie Δ mulţimea tuturor consecinţelor ei pozitive. Vom arăta că Δ are aceleaşi modele ca şi Σ şi, deci, că este o mulţime de axiome pozitive pentru Δ.

a) Orice model al lui Σ este şi model al lui Δ. Acest fapt este trivial adevărat, propoziţiile din Δ fiind consecinţe ale lui Σ.

b) Orice model al lui Δ este şi model al lui Σ. Fie deci M' un model al lui Δ şi fie Γ mulţimea propoziţiilor $(- \varphi)$ astfel încât φ este pozitivă şi $M' \models (- \varphi)$. Să luăm n propoziţii $(- \varphi_1)$, ... $(- \varphi_n)$ din Δ. Atunci putem construi propoziţia

$$\psi = (\varphi_1 \vee (\varphi_2 \ldots \vee \varphi_n)\ldots)$$

Dar ψ nu e adevărată în M'. Prin urmare, ψ nu aparţine lui Δ şi deci nu este o consecinţă a lui Σ. Ca urmare, mulţimea $\Sigma \cup \{(- \varphi_1), \ldots (- \varphi_n)\}$ este realizabilă. Atunci ea este, conform teoremei de compactitate, finit realizabilă. Însă mulţimea $\{(- \varphi_1), \ldots (- \varphi_n)\}$ este o submulţime oarecare finită a lui Γ. Aşadar, $\Sigma \cup \Gamma$ este finit realizabilă. Prin teorema de compactitate, ea este realizabilă. Fie M un model al ei. În M este falsă orice propoziţie pozitivă care este falsă în M'. Adică, dacă φ este o propoziţie pozitivă şi nu e adevărat că $M' \models \varphi$, atunci nu e adevărat că $M' \models \varphi$. Ceea ce e tot una cu a spune că dacă $M' \models \varphi$, atunci $M'' \models \varphi$, pentru orice propoziţie pozitivă φ.

Să arătăm acum că $M \subseteq M'$. Într-adevăr, să ne amintim că literele propoziţionale sunt propoziţii pozitive. Atunci, dacă φ este o literă propoziţională şi $M \models \varphi$, avem $\varphi \in M$. Dar avem şi $M' \models \varphi$, deci $\varphi \in M'$. Aşadar, $M \subseteq M'$. Însă Σ este o teorie crescătoare, deci $M' \models \Sigma$. Astfel, presupunând că M' e un model al lui Δ, am arătat că este şi model al lui Σ, q.e.d.

*

* *

In paragrafele anterioare am formulat *teoria modelelor* pentru logica propoziţiilor. Această teorie logică este foarte simplă, în comparaţie cu, de exemplu, teoria modelelor pentru logica predicatelor. Dar ea permite să formulăm unele teoreme precum cea de completitudine, cea de compactitate sau a lui Craig care – după cum vom vedea – au un rol foarte important în cercetarea diverselor logici.

§ 6. Exerciţii

1. Formalizaţi următoarele expresii în logica propoziţiilor. De fiecare dată încercaţi să păstraţi cât mai mult structura iniţială a acestor expresii, şi daţi întotdeauna cheia notaţiilor folosite.

a) Maşina nu face mult zgomot, dar consumă foarte multă energie.

b) Nu-i adevărat că va veni la petrecere şi Ion, dacă vine Maria.

c) Această scrisoare nu a fost scrisă nici cu stiloul şi nici cu creionul.

d) Nu-i adevărat că sârbii sunt vinovaţi, iar croaţii nu.

e) Nimeni nu a râs sau aplaudat.

f) Cu voia Domnului, va fi pace.

g) Dacă atât mama cât şi tata ies la plimbare, voi merge şi eu, dar voi merge chiar dacă numai mama iese să se plimbe.

h) Nu cred că aceasta a fost intenţia ta, dar dacă e aşa, nu sunt de acord cu tine.

i) Dacă în timpul ploii e soare, atunci va apare curcubeul.

2. Sunt valide următoarele raţionamente?

a) Dacă el se înscrie în concurs şi va alerga cât poate de repede, atunci, chiar dacă nu va ieşi pe primul loc, va obţine totuşi un record personal; dar dacă nu va alerga cât poate de repede, nu va obţine un record personal. Prin urmare, dacă se va înscrie în concurs însă nu va obţine un record personal, înseamnă că nu a alergat cât se poate de repede.

b) E fals că, dacă aş avea diabet, lucrul acesta m-ar face fericit. Aşadar, am diabet.

c) Dacă Dumnezeu nu poate preveni răul, înseamnă că nu e atotputernic. Iar dacă îl poate preveni, însă nu o face, înseamnă că nu este pe deplin bun. Or, Dumnezeu e atât atotputernic, cât şi pe deplin bun. Prin urmare, răul nu există.

3. Fie următoarele două propoziţii:

a) Nu voi întârzia de la întâlnire dacă nu voi avea vreo şedinţă iar tramvaiul va veni la timp.

b) Nu voi întârzia de la întâlnire numai dacă nu voi avea vreo şedinţă, iar tramvaiul va veni la timp.

Arătaţi care dintre ele decurge logic din propoziţia:

Dacă voi întârzia, înseamnă că voi avea o şedinţă sau cel puţin că tramvaiul nu va veni la timp.

4. Trei indivizi, *A*, *B* şi *C*, sunt cercetaţi în legătură cu comiterea unei infracţiuni. Ei declară următoarele:

a) *A*: *B* este vinovat, dar *C* este nevinovat.

b) *B*: Dacă *A* este vinovat, atunci şi *C* este vinovat.

c) *C*: Eu nu sunt vinovat, dar cel puţin unul din ceilalţi doi e vinovat.

Încercaţi să determinaţi:

a) dacă cele trei declaraţii pot fi adevărate împreună;

b) dacă nu cumva una din cele trei declaraţii decurge logic din alta;

c) care dintre cele trei declaraţii e mincinoasă, dacă toţi trei suspecţii sunt vinovaţi;

d) care dintre cei trei suspecţi este vinovat, dacă toate cele trei declaraţii sunt adevărate.

5. Arătaţi că următoarele expresii sunt valide:

a) $\varphi \rightarrow \varphi$ (legea identităţii)

b) $- \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$ (din fals decurge orice)

c) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$ (adevărul decurge din orice)

d) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi$ (legea lui Peirce)

e) $- (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (- \varphi \vee - \psi)$ (legea lui de Morgan)

f) $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$

6. Demonstraţi expresiile de mai sus în sistemul axiomatic (Σ, R).

7. Arătaţi că două propoziţii, φ şi ψ, sunt logic echivalente dacă şi numai dacă ele au aceeaşi valoare de adevăr în orice model.

8. O mulţime K de conective logice se numeşte *completă* dacă se poate arăta că orice formulă φ este logic echivalentă cu o formulă ψ în care nu apar decât conectivele logice din K. Arătaţi că următoarele mulţimi de conective logice sunt complete:

a) $-, \vee,$

b) $-, \vee$

c) $-,$

d) $-, \rightarrow$

e) /

Conectivul logic „/ " se defineşte cu ajutorul următorului tabel de adevăr.

φ	ψ	φ / ψ
T	T	F
T	F	F
F	T	F
F	F	T

9. Un conectiv logic binar f se numeşte *conservativ* dacă $f(\varphi, \psi) = f(\varphi, \varphi \wedge \psi)$

Determinaţi care sunt conectivele logice conservative.

10. O propoziţie φ este strict realizabilă dacă şi numai dacă atât φ cât şi negaţia ei sunt realizabile. Arătaţi că φ este strict realizabilă dacă şi numai dacă $- \varphi$ este strict realizabilă.

11. Demonstraţi următoarele afirmaţii:

a) Dacă $\varphi \rightarrow \psi$ este nerealizabilă, atunci φ este validă şi ψ este nerealizabilă;

b) $\varphi \wedge \psi$ este validă dacă şi numai dacă atât φ cât şi ψ sunt tautologii.

12. Daţi un exemplu de propoziţie care nu satisface următoarea condiţie: Dacă $\varphi \vee \psi$ este validă, atunci φ este validă sau ψ este validă.

13. Se numeşte *judecata* corespunzătoare unei propoziţii φ mulţimea Φ a modelelor în care φ este adevărată.

a) să se determine judecata corespunzătoare unei propoziţii valide;

b) să se determine judecata corespunzătoare unei propoziţii nerealizabile.

14. Date fiind judecăţile Φ şi Ψ corespunzătoare propoziţiilor φ, respectiv ψ, să se determine judecăţile corespunzătoare propoziţiilor:

a) $-\varphi$

b) $\varphi \wedge \psi$

c) $\varphi \vee \psi$

15. Să se arate că structura: $< J, \subset, \cap, \cup >$ unde J este mulţimea judecăţilor corespunzătoare propoziţiilor unui limbaj $L(S)$, iar $\subset$, $\cap$, $\cup$ sunt complementara, intersecţia şi reuniunea de mulţimi, este o algebră booleană.

16. Câte propoziţii are limbajul $L(S)$ atunci când S este:

a) finită;

b) infinită numărabilă;

c) infinită nenumărabilă?

17. Să se demonstreze propoziţiile:

a) (2.4)

b) (2.5)

c) (2.6)

18. Câte modele are un sistem formal $L(S)$? (să se cerceteze cazurile când S este a) finită; b) infinită numărabilă).

19. Să se arate că o propoziţie φ este realizabilă ddacă $-\varphi$ nu este validă.

20. Să se arate că dacă propoziţia φ este realizabilă şi $L(S)$ este numărabilă, atunci mulţimea modelelor lui φ este nenumărabilă.

21. Să se completeze definiţia (3.3) a valorii lui φ pentru atribuirea $a_0, \ldots a_n$ în cazul conectivelor logice $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

22. Să se arate că:

a) dacă φ este demonstrabilă în sistemul axiomatic (Σ, R), atunci pentru orice atribuire $a_0, \ldots a_n$, valoarea lui φ este t.

b) dacă valoarea lui φ pentru orice atribuire $a_0, \ldots a_n$ este t, atunci φ este demonstrabilă în sistemul (Σ, R).

23. Să se demonstreze că $\phi \vdash \varphi$ ddacă φ este tautologie.

24. Să se demonstreze propoziţia (4.9.5), punctele (b) – (e).

25. Să se demonstreze propoziţia (5.4).

26. Să se arate că nici o mulţime de modele cu un singur element nu este elementară.

27. Să se arate că mulţimile de modele cu un singur element sunt elementare în sens larg.

28. Să se arate că toate mulţimile finite de modele sunt elementare în sens larg.

29. Să se dea un exemplu de mulţime de modele care să fie infinită şi să nu fie elementară în sens larg.

30. Să se arate că dacă o mulţime Σ de propoziţii are exact un model, atunci este completă.

31. Să se demonstreze propoziţia (5.1.3).

32. Demonstraţi, cu ajutorul teoremei lui Craig, că dacă propoziţiile φ şi ψ nu au nici o literă propoziţională în comun, atunci $\varphi \vee \psi$ este validă dacă şi numai dacă φ este validă sau ψ este validă.

Capitolul II

PROPOZIŢII ŞI JUDECĂŢI

§ 7. Propoziţiile ca purtători ai adevărului

Vom aborda, în acest paragraf, mai în detaliu, o distincţie propusă în § 5: cea dintre propoziţii şi judecăţi.

În capitolul I, pentru a construi semantica, am acceptat – fără însă a şi justifica această alegere – că predicatul „adevărat" se aplică *propoziţiilor*; propoziţiile sunt purtătorii adevărului. Potrivit definiţiei (3.2), fiind dat un model *M*, predicatul „adevărat" urmează să fie aplicat propoziţiilor; nici o altă entitate nu este adecvată în acelaşi scop. Propoziţiile sunt constructe lingviste: ele sunt fie membri ai lui *S*, fie constructe realizate prin aplicarea (de un număr finit de ori) a operaţiilor logice asupra unor propoziţii mai simple (cf. (2.2)).

Să încercăm să privim această chestiune într-o manieră ceva mai generală. Ne vom raporta mai întâi la propoziţiile din *limba naturală*, iar apoi vom încerca să vedem ce putem reda din distincţiile făcute, în raport cu un limbaj formal (prezentat atât sintactic, cât şi semantic), precum este *L*(*S*).

Fie propoziţia:

(7.1) Uşa este închisă.

Ea este un contruct lingvistic: un şir format din trei cuvinte ale limbii române – „uşa", „este" şi „închisă". Să luăm alte două propoziţii:

(7.2) Ion este a treia persoană de pe listă.

(7.3) Uşa este închisă.

Ceea ce frapează cu aceste două noi exemple e că, de fapt, (7.3) e aceeaşi propoziţie cu (7.1) şi, deci, nu e o propoziţie nouă. Totuşi, într-un sens e vorba de două propoziţii: una notată cu „(7.1)", alta notată „(7.3)". Însă, se va răspunde, e vorba de aceeaşi propoziţie, fiindcă ele se compun din aceleaşi trei cuvinte: „uşa", „este" şi „închisă". Or, se va putea observa din nou că, de pildă, cuvântul „uşa", care apare în (7.1) e totuşi altul decât cuvântul „uşa" care apare în

(7.3); că e aşa se vede imediat ce notăm că al doilea cuvânt e scris câteva rânduri mai jos decât primul.

Dificultatea se poate rezolva simplu, desebind între 1) un semn-gen şi 2) un semn-individual. Astfel avem cuvântul-gen: „uşa" şi cuvintele-individuale „uşa", care apare în (7.1), şi „uşa", care apare în (7.3); în mod analog, avem propoziţia-gen „Uşa este deschisă" şi propoziţiile-individuale (7.1) şi (7.3). Distincţia aceasta vine de la C. S. Peirce: după el, pronunţarea şi scrierea unui cuvânt sau unei propoziţii sunt semne-individuale (*tokens*) ale expresiei lingvistice avute în vedere; iar această expresie lingvistică este de semnul-gen (*type*) al acelei pronunţări ori scrieri ale acelei expresii. Tot aşa, în limbajul nostru formal $L(S)$, dacă scriem expresia:

(7.4) $(p \wedge ((p \vee q) \rightarrow r))$

în aceasta avem două apariţii ale propoziţiei-gen p – deci două propoziţii-individuale de gen p. De asemenea, (7.4) şi

(7.5) $(p \vee ((p \vee q) \rightarrow r))$

sunt două propoziţii-individuale de acelaşi gen. În cele ce urmează voi scrie simplu „propoziţie" pentru „propoziţie-gen"; în acest sens, de altfel, am folosit acest cuvânt şi până în prezent. Aşadar, o propoziţie este un *universal*: un şir repetabil de sunete sau inscripţii grafice.

Putem acum să reformulăm punctul de vedere adoptat în paragrafele anterioare, pe baza lui (3.2): adevărul este o proprietate a propoziţiilor-gen, sau – mai simplu zis – a propoziţiilor. Or, cel puţin atunci când avem în minte propoziţiile dintr-o limbă naturală – din limba română, în particular – se vede cu uşurinţă că o asemenea alegere nu merge pe deplin bine. Într-adevăr, propoziţia „Uşa este închisă" este adevărată pentru un om care, să zicem, priveşte la o uşă închisă şi foloseşte această propoziţie pentru a spune ceva despre uşa pe care o priveşte, dar poate desigur să fie falsă pentru altcineva. Însă nu putem să admitem că una şi aceeaşi propoziţie este atât adevărată cât şi falsă.

Două soluţii ale acestei dificultăţi sunt imediate:

1) Să se presupună că purtătorii adevărului nu sunt propoziţiile, ci propoziţiile-individuale; adevărul nu e o proprietate a propoziţiei „Uşa este închisă", ci, de exemplu, ale lui (7.1) şi (7.3). Ei i se pot aduce mai multe obiecţii:

a) O propoziţie poate să fie pronunţată ori scrisă o dată, de mai multe ori, sau niciodată. Existenţa ei nu este compromisă de faptul că, să zicem, nimeni nu a pronunţat-o ori a scris-o vreodată (deci, de faptul că nu există nici o propoziţie-individuală de genul ei). Acum, să presupunem o situaţie în care un om priveşte o uşă închisă, dar nu pronunţă ori scrie o propoziţie-individuală „Uşa este închisă". În acest caz nu există nici o entitate – o propoziţie-individuală – despre care să putem afirma că este adevărată sau falsă; însă noi vrem totuşi

să spunem că acea uşă, pe care o priveşte acel om, este închisă: vrem totuşi să spunem că, în acea situaţie, propoziţia „Uşa este închisă" e adevărată. Aşadar, trebuie să se dea seamă de cazurile când propoziţia nu e pronunţată ori scrisă de omul respectiv, la momentul respectiv (Quine).

b) Să presupunem că propoziţia „Uşa este închisă" este pronunţată atunci şi numai atunci când e pronunţată propoziţia „Afară plouă" şi că, mai mult, propoziţiile-individuale de primul gen sunt adevărate atunci şi numai atunci când sunt adevărate propoziţiile-individuale de al doilea gen. În acest caz, nu am avea cum să deosebim între cele două genuri de propoziţii-individuale.

c) Tot aşa, nu am avea cum să deosebim între propoziţiile care nu ar fi pronunţate niciodată (Quine).

2) O a doua soluţie, propusă de Quine, e aceea de a lua ca purtători ai adevărului propoziţiile eterne. Am văzut că o propoziţie-gen precum „Uşa este închisă" poate spune, în contexte diferite, lucruri diferite. Contextul este cel care selectează despre ce uşă este pronunţată propoziţia şi când e aceea închisă; aşadar, contextul vizează: a) locul; b) timpul. Două propoziţii-individuale, de acelaşi gen, dar pronunţate relativ la contexte diferite, pot să aibă valori de adevăr diferite; dar dacă sunt pronunţate relativ la acelaşi context, ele vor avea aceeaşi valoare de adevăr. Quine propune ca, ori de câte ori avem o propoziţie şi un context, să producem o nouă propoziţie, în care e încorporat contextul. De pildă, plecând de la propoziţia „Uşa este închisă', se construieşte propoziţia:

(7.6). Uşa aflată în locul *a* este închisă pe momentul *t*.

Propoziţia (7.6), spre deosebire de propoziţia „Uşa este închisă", are următoarea trăsătură caracteristică: valoarea ei de adevăr rămâne neschimbată, oricare ar fi timpul la care a fost pronunţată şi oricare ar fi persoana care o pronunţă. O propoziţie care posedă această trăsătură este numită de Quine *propoziţie eternă*. Quine propune să luăm astfel de propoziţii ca purtători ai adevărului.

Quine consideră că strategia sa 1) este fezabilă; şi 2) are multiple avantaje. Mai întâi, el consideră că ori de câte ori avem o propoziţie pe care vrem să o tratăm ca având înţeles, putem să construim o propoziţie-eternă care să îi corespundă; de asemenea, întotdeauna putem identifica contextul care ne permite acest lucru*. Avantajele acestei proceduri sunt următoarele:

a) Purtătorii adevărului sunt recunoscuţi ca fiind obiecte materiale pe care le putem manevra într-un mod riguros.

---

* În *Word and Object*, § 45, Quine menţionează totuşi dificultăţile ce apar pe acest drum odată ce avem în vedere *atitudinile propoziţionale* (de forma: eu *cred* că uşa este închisă).

b) Nu e nevoie să se considere că o propoziţie îşi schimbă valoarea de adevăr. Dacă cineva spune – plecând de la anumite date disponibile – că o propoziţie eternă e adevărată, dar – când alte date îi vin la îndemână – spune că aceasta e falsă, ceea ce se întâmplă *nu* e schimbarea valorii de adevăr a propoziţiei, ci schimbarea atitudinii sale faţă de ea, în lumina noilor date.

c) Propoziţiile eterne nu sunt foarte puţin răspândite, cum s-ar părea. Apelul la ele se bazează deci pe o procedură destul de utilizată. Astfel, propoziţiile teoretice din matematică şi din alte ştiinţe sunt eterne; datele empirice, predicţiile referitoare la evenimente singulare sunt tot propoziţii eterne (data, timpul, locul, persoanele implicate sunt indicate într-un mod obiectiv – şi nu sunt lăsate să varieze, prin folosirea unor descripţii incomplete, a unor cuvinte precum „aici", „acum" etc., ori a unor prenume ale persoanelor).

Cu toate acestea, strategia lui Quine întâmpină câteva dificultăţi grave:

a) Distincţia dintre propoziţiile eterne şi cele care nu sunt astfel e greu de făcut făcând apel la forma lingvistică şi chiar logică a propoziţiilor. De pildă, fie propoziţia

(7.7) Pământul e a treia planetă de la Soare.

Dată fiind stabilitatea sistemului nostru solar, această propoziţie exprimă o propoziţie a cărei valoare de adevăr nu se schimbă de la o generaţie la alta şi nici relativ la persoane diferite şi poate fi, deci, considerată o propoziţie eternă. Dar să luăm propoziţia

(7.2) Ion este a treia persoană de pe listă.

Forma lui (7.7) e (cel puţin aparent) aceeaşi cu a lui (7.2). Şi totuşi, este evident că (7.2) nu e o propoziţie eternă: valoarea ei de adevăr se schimbă în funcţie de circumstanţele în care e pronunţată. Care este acel Ion despre care se vorbeşte, şi care e lista cu pricina? Apoi, dacă Ion este un om norocos, s-ar putea ca în timp să avanseze pe listă etc. Aşadar, nu putem deosebi propoziţiile eterne pe baza formei lor.

b) Apelul la propoziţii eterne este de bună seamă convenabil atunci când avem a face cu propoziţii din ştiinţele teoretice; dar, atunci când în propoziţiile noastre apar expresii precum „aici", „acum", „eu", „acesta" e greu să le abandonăm în favoarea unor propoziţii eterne. Quine sugerează următoarea procedură: plecând de la propoziţia

(7.8) Acum este senin în Bucureşti,

să se înlocuiască expresia „acum" cu o descriere obiectivă a momentului. Bunăoară, din (7.8) am obţine propoziţia eternă:

(7.9) In ziua de 26 februarie 1994 ora 12 este senin în Bucureşti.

Problema este că (7.8) nu spune acelaşi lucru. Că este aşa se vede imediat ce luăm propoziţia:

(7.10) Fiul meu ştie că acum este senin în Bucureşti.

Dacă (7.8) ar spune acelaşi lucru cu (7.9), ar trebui ca înlocuind în această propoziţie expresia „acum" cu „în ziua de 26 februarie 1994, ora 12" să obţinem o propoziţie cu aceeaşi valoare de adevăr. Să presupunem că fiul meu a pronunţat propoziţia (7.10) în ziua de 26 februarie 1994 la ora 12 şi că a pronunţat-o după ce s-a uitat pe cer şi a văzut că e senin; aşadar, (7.10) e adevărată. Însă

(7.11) Fiul meu ştie că în ziua de 26 februarie 1994, ora 12 este senin în Bucureşti,

nu e neapărat adevărată – de exemplu pentru că, să zicem, el a avut o mică amnezie şi a uitat că acea amiază senină era în ziua de 26 februarie 1994. Aşadar, expresii precum „aici", „acum", „eu" etc. nu pot fi eliminate cu uşurinţă pentru a produce propoziţii eterne.

c) O propoziţie ca (7.9) este, după Quine, o propoziţie eternă. Însă – strict vorbind – nu este aşa. Căci stabilirea zilei ca fiind 26 februarie 1994 e făcută relativ la anumite convenţii, iar stabilirea locului e făcută tot aşa. E greu să admitem că există un sistem de referinţă absolut în raport cu care să putem spune că am produs o propoziţie eternă în sens absolut. Dar, se va obiecta, o atare exigenţă este prea tare. Nu e nevoie să determină locul în raport cu o poziţie absolută; pentru nevoile noastre, poziţia stabilită cu ajutorul longitudinii şi latitudinii pe Pământ este suficientă; tot aşa, era gregoriană e suficientă pentru a determina timpul pentru cele mai multe din propoziţiile pe care le folosim. Căci astfel toate pronunţările lui (7.9) vor putea fi înţelese ca având fixată valoarea de adevăr. Problema este însă că astfel vom putea tot aşa de bine să alegem şi sisteme de referinţă mai restrânse – de pildă, am putea susţine că o propoziţie ca:

(7.12) Regele Franţei este înţelept.

este eternă, dacă am presupune că ea e pronunţată numai în timpul domniei lui Ludovic al XIV-lea. La limită, am putea cere chiar ca (8.1) să fie eternă, dacă am admite că ea să fie pronunţată numai relativ la o anumită uşă şi la un anumit timp (pentru alte uşi, ori pentru aceeaşi uşă la alte momente am urma să folosim alte propoziţii, spre a transmite aceeaşi informaţie).

d) În sfârşit, dacă am lucra numai cu propoziţii eterne, construcţia unei teorii a modelelor ar întâmpina dificultăţi sporite. Mai întâi, ar fi greu de spus în ce sens o propoziţie precum (7.6): Uşa aflată în locul *a* este închisă în momentul *t*, ar putea fi adevărată într-un model şi falsă într-altul dacă nu am accepta că, în modele diferite, înţelegem prin *a* şi prin *t* locuri, respectiv momente de timp diferite; or, introducerea locului şi a timpului în propoziţie – spre a produce o propoziţie eternă – avuseseră ca scop tocmai înlăturarea posibilităţii

de variere a contextului care face adevărată ori falsă propoziţia, deci tocmai păstrarea fixată a unui loc şi a unui timp.

În al doilea rând, e greu de precizat ce se înţelege prin context. De pildă, am spus că se poate ca o propoziţie p să fie adevărată într-un model M şi falsă într-un model M'. Potrivit procedurii lui Quine, ar trebui ca specificarea unui model să reprezinte o parte a contextului (sau contextul însuşi, în cazul $L(S)$) în care vrem să spunem că o propoziţie p este adevărată. Plecând de aici, am putea – pentru orice p – să construim o propoziţie eternă „p în M". Dar care e comportamentul acestei noi propoziţii? Unii filosofi au argumentat că ea are aceeaşi valoare de adevăr în orice model. Căci, dacă e adevărată într-un M', atunci va trebui să fie adevărată în toate modelele – iar dacă e falsă într-un M', atunci va trebui să fie falsă în toate modelele. Prin urmare, dacă ar trebui să abandonăm toate propoziţiile de forma p în formarea unora de forma p în M, atunci ar trebui să admitem că în toate modelele sunt adevărate aceleaşi propoziţii. În cazul modelelor pentru $L(S)$ – şi, subliniez, în *acest* caz! căci generalizarea nu e posibilă – decurge că $L(S)$ ar urma să aibă un singur model.

§ 8. Conceptul de judecată

Aşadar, nici propoziţiile, nici propoziţiile-individuale şi nici propoziţiile-eterne nu par să fie candidaţi potriviţi pentru a fi consideraţi ca purtători ai adevărului. Dificultăţi de genul celor menţionate i-au condus pe mulţi filosofi spre o altă opţiune: aceea de a lua drept purtători ai adevărului entităţi de un alt gen, numite *judecăţi**. Ce sunt judecăţile? Ele sunt *obiecte abstracte* – deci nu sunt nici obiecte lingvistice (precum propoziţiile-individuale şi propoziţiile-tip), nici clase de propoziţii (individuale). În al doilea rând, zicem că o propoziţie (individuală sau tip) *exprimă* o judecată. Judecata este ceea ce exprimă o propoziţie.

Din cele zise până acum nu decurge însă exact ce este o judecată. Opţiunile în acest sens sunt încă deschise. Una dintre ele – asupra căreia mă voi opri mai pe larg, fiindcă s-a aflat în centrul discuţiilor despre judecăţi – este următoarea: *o judecată este înţelesul unei propoziţii.* Cu aceasta se poate spune că o propoziţie exprimă acum o judecată, altă dată o altă judecată etc. Fiecare propoziţie-individuală este luată ca exprimând o judecată (dacă propoziţia este eternă, ea va exprima mereu aceeaşi judecată). Când folosim limbajul, ceea ce variază de la context la context este judecata pe care o exprimă o propoziţie, nu valoarea de adevăr

* Deosebirea dintre propoziţii şi judecăţi e răsfrângerea în româneşte a celei din limba engleză, dintre *sentence* şi *proposition*. În româneşte s-a încercat să se traducă termenul „*proposition*" în mai multe feluri, de ex., ca *propoziţie* ori *ppropoziţie*. Prefer să scriu *judecată*, chiar dacă termenul acesta în mod obişnuit e luat ca aplicându-se propoziţiilor categorice.

a propoziţiei. Judecăţile sunt adevărate sau false. Ele rămân neschimbate în privinţa valorii lor de adevăr, fără legătură cu contextul utilizării limbajului; nu contează care e persoana care le exprimă folosind limbajul, nu contează când sunt ele exprimate. Ceea ce ţine de context e altceva: care sunt propoziţiile-individuale care sunt selectate pentru a exprima acele judecăţi. Cum zice Quine[1]: „înţelesurile propoziţiilor sunt luate ca entităţi abstracte de sine stătătoare, sub numele de *judecăţi*. Acestea – şi nu propoziţiile însele – sunt privite ca lucrurile care sunt adevărate sau false. De asemenea, ele sunt lucrurile care stau în relaţia de implicaţie logică; ele sunt lucrurile care, de asemenea, sunt cunoscute sau crezute sau nu sunt crezute şi care se dovedeşte că sunt evidente sau surprinzătoare". Judecăţile sunt tratate, aşadar, drept *susţineri despre lume*, genul de lucruri care sunt afirmate de o propoziţie (individuală).

Vom cerceta următoarele probleme legate de judecăţi: ce motive au avut filosofii pentru a le postula; care sunt avantajele tratării judecăţilor ca purtători ai adevărului; ce obiecţii se pot aduce acestei opţiuni; dacă e posibilă depăşirea acelor obiecţii.

După Quine[2], patru au fost motivele care i-au determinat pe filosofi să accepte judecăţile ca entităţi abstracte:

1. Judecăţile pot funcţiona ca purtători ai adevărului; adevărate nu pot fi propoziţiile, ci susţinerile despre lume pe care le facem prin intermediul acestora – aşadar judecăţile.

2. Judecăţile funcţionează drept constante în traduceri. Când traducem propoziţia „The snow is white" prin propoziţia „Zăpada este albă", presupunem că cele două propoziţii au ceva în comun. Acest ceva comun este judecata pe care ambele o exprimă – anume susţinerea că zăpada este albă.

3. Judecăţile funcţionează drept constante în analiza filosofică. Atunci când analizăm o propoziţie, aceasta (*analysandum*) şi propoziţia în care a fost analizată (*analysans*) trebuie să admitem că au ceva în comun. Când Russell propunea să analizăm o propoziţie precum (8.1): Regele Franţei este înţelept, în conjuncţia următoarelor trei propoziţii:

(8.1 a) Există un rege al Franţei.

(8.1 b) Nu există doi regi ai Franţei.

(8.1 c) Dacă cineva este rege al Franţei, atunci este înţelept,

el ne invita să admitem că cele două propoziţii – (8.1) şi conjuncţia propoziţiilor (8.1 a) – (8.1 c) – exprimă aceeaşi susţinere despre lume; altminteri nu s-ar mai putea spune că a doua e o analiză a primeia.

---

[1] *Philosophy of Logic*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1970, p. 2.

[2] W. v. O. Quine, *Word and Object*, p. 206.

4. Judecăţile sunt obiecte ale atitudinilor propoziţionale. Să considerăm, de pildă, propoziţia:

(8.2) Ion crede că uşa este închisă.

Această propoziţie formulează ceea ce se numeşte o *atitudine propoziţională*. Ea formulează o atitudine a lui Ion: aceea că el crede ceva; alte atitudini ale sale ar putea fi: el vrea ceva, el ştie ceva, el presimte ceva, el susţine ceva, el caută ceva etc. Atitudinea lui Ion este propoziţională, căci după clauza „că" urmează o *propoziţie*. Problema este acum aceea de a spune ce este relaţia *de a crede* (mai pe scurt, forţând puţin limba: relaţia de *crezare*). Aparent, aceasta e o relaţie între Ion şi propoziţia ce urmează clauzei „că", în cazul nostru între Ion şi propoziţia „Uşa este închisă". Dar nu poate fi vorba de o propoziţie-tip, aflată în relaţia de crezare cu Ion; căci trebuie specificat care este uşa despre care Ion crede că e închisă. În acest caz însă, ar trebui ca (8.2) să fie înlocuită cu ceva de genul:

(8.3) Ion crede că uşa aflată în locul *a* este închisă la momentul *t*.

Acum, după clauza „că" apare o propoziţie-individuală. Or, se poate vedea cu uşurinţă că nici aceasta nu e o alegere fericită. Să presupunem că *a* este sala 216 din Facultatea de Filosofie a Universităţii Bucureşti. Dar, aşa cum ştim, această sală este sediul Catedrei de Filosofie a Universităţii Bucureşti; şi, deşi (8.3) e adevărată, s-ar putea ca Ion să nu fie de acord cu faptul că uşa Catedrei de Filosofie a Universităţii Bucureşti e închisă la momentul *t*, fiindcă el nu ştie că sala 216 e totuna cu sediul Catedrei de Filosofie. Dar propoziţiile

(8.4) Uşa sălii 216 din Facultatea de Filosofie a Universităţii Bucureşti este închisă la momentul *t*.

(8.5) Uşa Catedrei de Filosofie a Universităţii Bucureşti e închisă la momentul *t*.

au întotdeauna aceeaşi valoare de adevăr (cel puţin atâta vreme cât nu se schimbă numerotarea sălilor ori sediul Catedrei de Filosofie). Or, relaţia de crezare dintre Ion şi (8.4) are loc, nu însă şi dintre Ion şi (8.5). Concluzia e deci că relaţia de crezare nu e o relaţie între persoane şi propoziţii-individuale. Atunci se poate proceda altfel: să se admită că relaţia de crezare este o relaţie între o persoană şi *ceea ce aceasta crede*; ca obiect al crezării persoanei este o judecată – anume susţinerea pe care, atunci când crede ceva, acea persoană o face despre lume.

Celor patru motive de a introduce judecăţile ca un tip de entităţi, pe care le numeşte Quine, le-am mai putea adăuga unul. Acesta e mai general, sub el căzând unele dintre cele amintite până acum. Argumentul curge astfel: putem folosi o propoziţie-tip în mai multe feluri. Bunăoară, fie propoziţia: „Bătălia de la Mărăşeşti a avut loc în 1917". Eu pot:

(i) să *asertez* această propoziţie, atunci când vreau să comunic data corectă cuiva care nu ştie când a avut loc bătălia de la Mărăşeşti;

(ii) să folosesc această propoziţie în mod *condiţional*, deci fără a o aserta, de pildă în: Dacă bătălia de la Mărăşeşti a avut loc în 1917, atunci sigur bunicul meu nu a participat la ea" (fiindcă eu ştiu că el nu a luptat pe front în 1917);

(iii) să folosesc această propoziţie în mod *interogativ*, atunci când, de pildă, întreb: „A avut loc bătălia de la Mărăşeşti în 1917?";

(iv) să îmi exprim o *opinie*, când zic: „Eu cred că bătălia de la Mărăşeşti a avut loc în anul 1917";

(v) să emit o *ipoteză*, care urmează a fi testată: „Bătălia de la Mărăşeşti a avut loc în anul 1917";

(vi) în genere, o propoziţie poate fi folosită pentru a *ordona* ceva, pentru a *promite* ceva, pentru a formula o condiţie *contrafactuală* etc. Nu toate propoziţiile sunt potrivite pentru aceste folosiri; de exemplu, cea pe care am considerat-o nu poate fi utilizată în modurile numite aici. Dar altele pot, bunăoară propoziţia: „Andrei se culcă la ora 10 seara". Ea poate fi folosită pentru a ordona ceva: „Andrei, culcă-te la ora 10 seara", pentru a-i promite ceva: „Dacă te culci la ora 10 seara, atunci îţi promit că mâine te las să mergi la film" sau contrafactual: „Dacă Andrei s-ar culca la ora 10 seara, atunci ar fi odihnit dimineaţa" etc.

Aceste situaţii ne permit să facem o distincţie între *sensul* sau *înţelesul* unei propoziţii şi *forţa* ei. Înţelesul propoziţiei este ceea ce e gândit, ceea ce e înţeles atunci când folosim o expresie; dar propoziţia este pronunţată cu o anumită forţă – cu o forţă asertivă, cu una interogativă, cu una condiţională ş.a.m.d. Distincţia aceasta vine de la Frege. El a deosebit între a) *conţinutul* unei propoziţii, sau gândul exprimat de ea; şi b) faptul că acea propoziţie este afirmată sau nu. Fie o propoziţie φ; pentru a formula faptul că ceea ce e avut în vedere e conţinutul ei, Frege scria:

$-\varphi$

Pentru a formula faptul că propoziţia e asertată, el scria:

$\vdash \varphi$

Asertarea e un caz special al *forţei* cu care e folosită o propoziţie. Frege nu a generalizat noţiunea utilizată la punctul b), dar pe distincţia sa s-a clădit distincţia mai generală între sens (înţeles) şi forţă.

E uşor de văzut în ce constă pasul următor: înţelesul unei propoziţii e judecata pe care aceasta o exprimă; aşadar, distincţia avută în vedere e cea dintre 1) judecata exprimată de o propoziţie; şi 2) forţa cu care e utilizată acea propoziţie. Desigur, forţa cu care utilizăm o propoziţie se poate schimba; dar ceva trebuie că rămâne neschimbat; altminteri cum am putea să admitem

că atunci când afirmăm, întrebăm, considerăm, permitem, ordonăm etc. ceva, noi avem în minte acelaşi lucru pe care îl afirmăm, întrebăm etc. Judecăţile sunt constantele căutate; introducându-le ca entităţi, putem explica de ce putem proceda astfel.

Să notăm că acest motiv e mai tare decât unele dintre cele numite de Quine: căci 1) asertarea unei propoziţii (pentru a face o susţinere despre lume) e un tip de forţă; 2) folosirea unei propoziţii ca analysans sau analysandum e un tip de forţă; 3) exprimarea unei atitudini propoziţionale – „eu cred că", „eu vreau să" – e de asemenea un tip de forţă.

G. P. Baker şi P. M. S. Hacker rezumă astfel distincţia dintre sens (înţeles) şi forţă[1]:

(i) Orice propoziţie-tip are atât un înţeles cât şi o forţă, adică atât o „componentă care exprimă înţelesul", cât şi un „indicativ al forţei".

(ii) Forţa unei propoziţii determină (cel puţin parţial) ce *act de vorbire* e realizat prin pronunţarea acestei propoziţii, de pildă dacă e pusă o întrebare, dacă e făcută o afirmaţie ori dacă e formulată o ipoteză.

(iii) Au forţă numai propoziţiile-tip *complete*. (O jumătate de propoziţie nu poate fi folosită pentru a realiza nici un astfel de act de vorbire).

(iv) Există un *grad înalt de libertate* în combinarea înţelesurilor cu forţele. Absolut orice înţeles poate fi ataşat unei forţe date, şi absolut orice forţă poate fi legată cu un anumit înţeles. În particular, oricare înţeles poate fi înzestrat cu o forţă asertivă. (Echivalent zis: există o mare latitudine în combinarea „componentelor care exprimă înţelesul" cu „indicatorii forţei").

(v) Înţelesul unei propoziţii este purtătorul adevărului.

Aceste cinci motive sunt îndeajuns de puternice pentru a introduce judecăţile ca entităţi. În cele ce urmează mă voi opri însă numai asupra primului dintre ele. Două sunt raţiunile: pe de o parte, acesta e cel care a motivat abordarea de faţă. Pe de altă parte, se ridică o problemă: cum putem fi siguri că cele patru motive de a introduce judecăţile sunt motive pentru a introduce acelaşi soi de entităţi? Bunăoară, trebuie argumentat că aceste entităţi pe care le postulăm atunci când pronunţăm propoziţia (8.4. a) şi despre care afirmam că este adevărată este exact *aceeaşi* entitate cu cea pe care o postulăm, analizând propoziţia

(8.5) Ion crede că uşa Catedrei de Filosofie e Universităţii Bucureşti este închisă la momentul *t*.

ca stând în relaţia de crezare cu Ion. Rezumându-ne la primul motiv, evităm problema dacă purtătorii adevărului sunt entităţi de acelaşi soi cu obiectele atitudinilor propoziţionale ori cu constantele în traducere sau în analiză.

[1] G. P. Baker şi P. M. S. Hacker, *Language, Sense and Nonsense*, Blackwell, London, 1986, p. 49. Am tradus peste tot *sense* cu „înţeles".

Vom trece acum la a doua chestiune privitoare la judecăţi: care sunt avantajele tratării lor ca purtători ai adevărului.

1. Apelul la judecăţi ca purtători ai adevărului permite să susţinem că adevărul nu este o proprietate pe care acea entitate care o posedă sau o poate pierde funcţie de context – funcţie de persoana care o exprimă ori locul şi momentul în care o persoană o exprimă. De aceea, judecăţile sunt mai potrivite decât propoziţiile-tip pentru a fi luate ca purtători ai adevărului.

2. Judecăţile sunt, pe de o parte, îndeajuns de fin specificate pentru a permite să diferenţiem între susţineri diferite despre lume şi, pe de altă parte, îndeajuns de puţin fine pentru a putea spune când un vorbitor exprimă aceeaşi judecată. Voi aborda doar al doilea aspect; acesta e cel mai important în momentul de faţă. Propoziţiile-individuale sunt mai fin specificabile decât judecăţile. De pildă, dacă eu mă plâng şi zic: „Sunt obosit", eu exprim acelaşi lucru pe care cineva l-ar exprima dacă ar spune despre mine: „El e obosit". Aceste două propoziţii-individuale sunt, evident, diferite; au proprietăţi diferite – bunăoară, faptul că implică vorbitori diferiţi care folosesc propoziţii-tip diferite. Dar, ele au aceeaşi valoare de adevăr. Cum se explică acest lucru? Intuitiv, răspunsul este că ele au aceeaşi valoare de adevăr *pentru că* ele exprimă aceeaşi propoziţie, *pentru că* exprimă aceeaşi susţinere despre ceea ce are loc. E natural, de aceea, să luăm judecăţile şi nu propoziţiile-individuale ca purtători ai adevărului.

3. Propoziţiile-individuale au anumite deficienţe pe care judecăţile nu le au. Şi anume: propoziţiile-individuale pot avea (şi de obicei au) *presupoziţii;* judecăţile nu au presupoziţii. Judecăţile sunt sau adevărate sau false. Căci, cum o judecată este o susţinere despre lume, nu avem decât două posibilităţi: că acea susţinere e corectă sau că nu e corectă. Dacă susţinerea nu e corectă, judecata este falsă. Aşadar: în cazul judecăţilor, a spune că ele sunt false înseamnă *un singur lucru* – că nu sunt adevărate. Lucrurile se schimbă însă cu propoziţiile individuale. Dacă eu arăt spre masa din stânga mea (care e, întâmplător, goală) şi zic: „Cartea de pe masă este scrisă de Carnap", atunci propoziţia mea individuală sigur nu e adevărată; şi e aşa pentru că o presupoziţie a ei – că pe masă e o carte – nu e îndeplinită. Dacă pe masă ar fi însă o carte, dar una scrisă de altcineva, atunci presupoziţia propoziţiei-individuale pe care am pronunţat-o ar fi îndeplinită, dar propoziţia individuală iarăşi nu ar fi adevărată. Însă acum ea nu ar fi adevărată dintr-un alt motiv decât în primul caz – cum nu se întâmplă cu judecăţile.

Unii autori consideră că atunci când presupoziţiile unei propoziţii-individuale nu sunt îndeplinite, atunci acestea nu numai că sunt neadevărate, dar

nu sunt nici false. Ele nu ar avea valoare de adevăr. Am putea zice: atunci când presupoziţiile unei propoziţii-individuale nu sunt îndeplinite, atunci aceasta nu reuşeşte să exprime o judecată.

Să presupunem acum – aşa cum face Quine – că judecăţile ar fi exprimate numai de propoziţii eterne. Motivul pentru care el procedează astfel e următorul: dacă presupunem că judecăţile sunt înţelesuri ale propoziţiilor tip, atunci ar trebui să admitem că în diferite contexte propoziţia-tip „Uşa este închisă" îşi schimbă înţelesul şi exprimă judecăţi diferite în contexte diferite. Dar dacă am avea o propoziţie eternă, atunci nu ar mai trebui să spunem că înţelesul acesteia variază cu contextul.

Dacă însă judecăţile sunt înţelesuri ale propoziţiilor eterne, mai e nevoie de ele ca entităţi separate? Cel puţin două sunt avantajele judecăţilor asupra propoziţiilor eterne:

4. O propoziţie eternă poate să nu fie pronunţată niciodată. Cu toate acestea, despre judecata pe care o exprimă putem încă zice că e adevărată sau falsă.

5. Există judecăţi inexprimabile: anume judecăţi care nu corespund nici unei propoziţii (tip, individuale sau eterne). Astfel de judecăţi vom întâlni mai jos, în această lucrare. De pe acum trebuie totuşi notat ceva: inexprimabilitatea este nu absolută, ci relativă la un limbaj; ceea ce este neexprimabil într-un limbaj poate fi exprimat în altul. Dar, pentru orice limbaj îndeajuns de puternic, vor exista mereu judecăţi inexprimabile. (În § 5 am numit elementare judecăţile exprimabile; deci cele inexprimabile sunt *neelementare*; atenţie însă! acolo era vorba de un anumit *mod* de a construi judecăţile).

Diverşi autori au ridicat varii obiecţii împotriva admiterii judecăţilor. Cel mai viguros adversar al acestor entităţi este Quine: „Obiecţia mea faţă de recunoaşterea judecăţilor nu se naşte din parcimonie filosofică – din dorinţa de a nu visa la mai multe lucruri, în cer şi pe pământ, decât sunt necesare; nu ia naştere – mai concret – nici din particularism – din dezaprobarea entităţilor intangibile sau absolute. Obiecţia mea este mai importantă. Căci dacă ar exista judecăţi, ele ar induce o anumită relaţie de sinonimie sau echivalenţă între propoziţiile însele: ar fi echivalente acele propoziţii care exprimă aceleaşi judecăţi. Obiecţia mea este că relaţia de echivalenţă respectivă nu are nici un sens obiectiv la nivelul propoziţiilor"[1]. Să vedem mai pe larg în ce constau argumentele lui Quine.

[1] *Philosophy of Logic*, p. 3. A se vedea şi *Word and Object*, paragrafele 40–43.

Mai întâi, el admite că acceptarea judecăţilor ca înţelesuri ale propoziţiilor este doar o manifestare a unui punct de vedere mai răspândit asupra înţelesului. Potrivit acelui punct de vedere, există o galerie de idei, iar fiecare idee este ataşată expresiei al cărui înţeles este; în particular, fiecare judecată e ataşată unei propoziţii corespunzătoare. Quine propune să eliminăm aceste umbre ale propoziţiilor care sunt judecăţile. Căci tot ceea ce putem obţine lucrând cu ajutorul judecăţilor ne este dat şi dacă ne rezumăm numai la propoziţii. Aşadar, prima obiecţie este următoarea: judecăţile nu sunt mai folositoare ca vehicule ale adevărului decât propoziţiile eterne.

Obiecţia cea mai importantă este însă alta: în general, dacă admitem un gen de entităţi, trebuie să admitem şi un *criteriu de identitate* pentru ele. Maxima lui Quine este: nici o entitate fără identitate. Prin urmare, dacă admitem judecăţi, trebuie să spunem când sunt acestea identice şi când nu. Să presupunem deci că avem două propoziţii-tip. Să presupunem că ele sunt pronunţate – obţinând astfel două propoziţii-individuale. Care e atunci motivul pentru care noi am afirma: cele două propoziţii-individuale exprimă *aceeaşi* judecată?

Aici Quine argumentează prin reducere la absurd. Să admitem, zice el, că ar exista criterii de identitate pentru judecăţi. Atunci am putea proceda astfel: am zice că dacă două propoziţii (individuale) exprimă aceeaşi judecată, ele sunt strâns legate între ele. În ce fel? Judecăţile, să ne amintim, sunt înţelesuri ale propoziţiilor. Aşadar, dacă două propoziţii (individuale) exprimă aceeaşi judecată, înseamnă că au acelaşi înţeles. Sau, încă: înseamnă că sunt sinonime. Prin urmare, am putea să definim între propoziţiile (individuale) o relaţie de echivalenţă – relaţia de sinonimie.

Or, argumentează Quine, această relaţie nu poate fi construită[1]. Aşadar, premisa de la care am pornit e falsă: nu există criterii de identitate pentru judecăţi. De aceea, aceste entităţi trebuie eliminate.

Să recapitulăm obiecţiile care, după Quine, pot fi ridicate împotriva judecăţilor:

a) Judecăţile sunt entităţi a căror postulare nu e necesară. Tot ceea ce câştigăm prin apelul la ele poate fi reformulat apelând la alte entităţi – la propoziţiile eterne, sugerează Quine. Anume, putem spune că judecăţile sunt înţelesurile judecăţilor eterne. Însă dacă există o corespondenţă biunivocă între judecăţi şi aceste propoziţii – iar de propoziţiile eterne deja dispunem (căci ele sunt constructe în limba noastră), atunci de ce să postulăm şi aceste entităţi numite judecăţi? Briciul lui Occam poate fi pus aici la lucru: dacă nu este necesar, nu trebuie să multiplicăm entităţile.

[1] Nu voi insista asupra acestui argument al lui Quine. A se vedea celebra sa lucrare *Două dogme ale empirismului*. Traducere în românește în *Epistemologie. Orientări contemporane*, Editura Politică, Bucureşti, 1974.

b) Judecăţile sunt entităţi a căror natură nu e limpede. Ştim că ele sunt înţelesuri ale propoziţiilor; însă nu e clar ce fel de lucruri sunt aceste înţelesuri. Altfel zis, vrem să explicăm judecăţile zicând că ele sunt înţelesuri de propoziţii. Însă e mai clar ce e un astfel de înţeles decât ce e o judecată?

c) Se spune că judecăţile sunt obiecte abstracte. Or, filosofii din tradiţie nominalistă şi empiristă au avertizat în mod repetat că trebuie să fim cu băgare de seamă ori de câte ori se solicită admiterea unor entităţi abstracte. Principalul motiv, după Quine, e acela că, în ce le priveşte, e dificil să producem criterii satisfăcătoare de identitate. În particular: când putem spune că două judecăţi sunt identice? Putem da criterii în acest sens? Cel puţin atâta vreme cât astfel de criterii nu sunt formulate, trebuie să ne abţinem să admitem judecăţile.

d) În sfârşit, chiar dacă s-ar formula criterii de identitate pentru judecăţi, acestea nu vor fi satisfăcătoare, întrucât ar implica un concept nesatisfăcător de sinonimie (între propoziţii).

Dacă cineva ar vrea să facă totuşi apel la judecăţi ca purtători ai adevărului, atunci va fi nevoie să ofere căi de a răspunde la aceste obiecţii. După Quine, cea mai puternică e a patra. E normal de aceea ca ea să fie prima luată în discuţie. Aici se poate argumenta în mai multe feluri: 1) critica lui Quine a sinonimiei propoziţiilor nu rezistă: există propoziţii sinonime; 2) nu există propoziţii sinonime; în acelaşi timp, două propoziţii diferite exprimă întotdeauna judecăţi diferite. Prin urmare, chiar dacă spunem că două judecăţi sunt identice, nu susţinem prin aceasta că ele sunt exprimate de două propoziţii diferite – şi deci identitatea a două judecăţi nu implică sinonimia a două propoziţii; 3) admitem că două judecăţi exprimate de două propoziţii diferite sunt identice, că cele două propoziţii nu sunt sinonime; dar că, totuşi, faptul că ele nu sunt sinonime nu implică faptul că judecăţile pe care le exprimă nu pot fi identice.

Cea mai atrăgătoare soluţie cred că este a treia. Ea pare însă contradictorie, cel puţin atâta vreme cât definim sinonimia a două propoziţii prin faptul că ele exprimă aceeaşi judecată. Să adoptăm însă un punct de vedere mai slab privind relaţia dintre cele două condiţii: a exprima aceeaşi judecată e o condiţie numai necesară, dar nu şi suficientă pentru sinonimia a două propoziţii[1]. Adică, dintre relaţiile:

(i) Dacă două propoziţii nu sunt sinonime, atunci ele nu exprimă aceeaşi judecată.

---

[1] Acest punct de vedere e adoptat de R. Carnap, în *Semnificaţie şi necesitate*, Editura Dacia, Cluj, 1972, §§ 14–16, care sugerează că pentru sinonimia a două propoziţii e necesară o relaţie foarte tare, de „izomorfism structural".

(ii) Dacă două propoziţii sunt sinonime, atunci ele exprimă aceeaşi judecată, numai a doua este admisibilă, nu şi prima. Atunci însă, chiar dacă două propoziţii nu sunt sinonime, ele vor putea totuşi exprima aceeaşi judecată.

În ce priveşte obiecţia (c), răspunsul cel mai potrivit care i se poate da constă în a arăta precis *ce* sunt judecăţile: ce fel de obiecte sunt. Dacă ele sunt construite ca entităţi de un fel admis deja, având constituenţi despre care ştim când se află în relaţie de identitate, atunci vom fi produs, prin aceasta, căutatele criterii de identitate. Să observăm, de asemenea, că astfel se răspunde şi obiecţiei (b). Prima obiecţie poate fi depăşită dacă se dovedeşte că există judecăţi care nu pot fi prinse lingvistic prin propoziţii de vreun fel (în particular, prin propoziţii eterne). În capitolul următor se vor construi, într-adevăr, astfel de judecăţi (un exemplu e acesta: nici o propoziţie a aritmeticii lui Peano nu poate exprima judecata că axiomele aritmeticii sunt adevărate *numai* în modelul standard sau intenţionat al acesteia).

Voi menţiona două încercări de a construi judecăţile, astfel încât obiecţiile împotriva lor, precum cele menţionate mai devreme, să se disipeze.

a) *Judecăţile russelliene.* După Russell, judecăţile sunt susţineri despre lume, şi sunt adevărate exact în cazul în care lumea este aşa cum se susţine că este. Aceste judecăţi sunt entităţi complexe. Ele au constituenţi care corespund obiectului susţinerii. Astfel, fie propoziţia:

(8.6) Socrate este filosof.

Ea exprimă o judecată, care e susţinerea că omul Socrate are proprietatea de a fi filosof. Judecata va consta din *omul Socrate* şi din proprietatea *a fi filosof.* La fel, propoziţia:

(8.7) Ion are asul de treflă,

exprimă o judecată, ai cărui constituenţi sunt: Ion, asul de treflă şi relaţia de a avea. Această susţinere e adevărată atunci când printre faptele din lume se află şi acela că Ion are acel as de treflă.

Este uşor de văzut că nu e nici o problemă în a arăta când două judecăţi russelliene sunt identice: identitatea lor constă în faptul de a avea exact aceiaşi constituenţi. (Dacă vrem să fim mai precişi, am putea spune, de pildă, că judecata exprimată de (8.7) este *tripletul ordonat* < Ion, asul de treflă, a avea >; apelând la teoria mulţimilor, două triplete sunt identice atunci când primul element din primul triplet este identic cu primul element din al doilea triplet, când al doilea element din primul triplet este identic cu al doilea element din al doilea triplet şi când al treilea element din primul triplet este identic cu al treilea element din al doilea triplet).

Această concepţie asupra judecăţilor ridică însă probleme. Mai întâi, deşi desigur putem spune că două judecăţi sunt identice dacă ele au aceiaşi constituenţi, totuşi e greu de construit o judecată falsă. Ca să fie falsă, ar trebui să avem nişte fapte care o fac falsă. Or, acestea tocmai că nu există. De exemplu, judecata falsă exprimată de propoziţia:

(8.8) Desdemona îl iubea pe Cassio

ar urma să aibă drept component pe Desdemona, pe Cassio, precum şi relaţia de iubire a Desdemonei faţă de Cassio. Or, aceasta din urmă sigur nu există.

Apoi, ce este o proprietate precum „a fi filosof" ori o relaţie precum „a iubi"? Acestea sunt entităţi pentru care trebuie să oferim de asemenea criterii de identitate (iar obiecţiile lui Quine ar putea fi reiterate aici).

În al treilea rând, judecăţile russelliene nu sunt suficient de fine pentru a da seamă de distincţii pe care intuitiv le acceptăm. Astfel, să presupunem că eu pronunţ propoziţia: „Ion are asul de treflă", referindu-mă la un joc, anume de poker. Dacă Ion nu participă la acel joc, intuitiv noi considerăm că judecata e falsă. Dar, să presupunem în plus că, exact în acel moment, Ion se afla într-un alt loc şi juca poker; întâmplător, el avea în acel joc asul de treflă. Judecata russelliană, aşa cum am văzut, are drept constituenţi pe Ion, asul de treflă şi relaţia de a avea. Ea este adevărată dacă faptele în lume sunt exact aşa cum sunt aranjate în judecata noastră; or, în aceasta, ele sunt aranjate astfel încât relaţia a avea are loc între Ion şi asul de treflă. În lume, pe de altă parte, există faptul că Ion are asul de treflă. Aşadar, potrivit abordării russelliene, judecata exprimată de propoziţia „Ion are asul de treflă" va fi adevărată; însă am văzut că intuitiv situaţia nu stătea deloc astfel.

În sfârşit, aşa cum au arătat cercetări amănunţite, judecăţile russelliene nu permit o tratare satisfăcătoare a situaţiilor referenţiale, a celor care, bunăoară, sunt implicate în constituirea paradoxului mincinosului[1].

b) *Judecăţile în sens model-teoretic.* Aşa cum am văzut, modelele sunt entităţi pentru care avem criterii clare de identitate. În cazul lui $L(S)$ – singurul pe care l-am avut în vedere până acum – spunem că două modele M_1 şi M_2 sunt identice exact în cazul în care: a) M_1 este mulţimea S_1 de litere propoziţionale; b) M_2 este mulţimea S_2 de litere propoziţionale; şi c) S_1 este aceeaşi mulţime cu S_2. Am definit, de asemenea, pentru o propoziţie φ, relaţia $M \models \varphi$, şi am arătat cum poate fi construită aceasta pentru orice φ. Intuitiv, propusesem ca relaţia care are loc între M şi φ să fie citită astfel: φ e adevărată în M.

[1] În acest sens, J. Barwise, J. Etchemendy, *The Liar. An Essay on Truth and Circularity*, Oxford University Press, Oxford, 1987.

Acum pare puţin neîntemeiată această opţiune; vom vedea însă imediat că ea poate fi totuşi păstrată, chiar dacă admitem că purtătorii adevărului nu sunt propoziţiile, ci judecăţile. Pentru moment, să pornim de la relaţia $\models$ şi să acceptăm chiar, de dragul simplităţii, că citim expresia $M \models \varphi$ ca: φ e adevărată în M.

Vom defini acum judecăţile în sens model-teoretic:

(8.9) O judecată este o mulţime de modele.

De pildă, judecata că ceva are loc sau nu are loc (principiul logic al terţului exclus) e mulţimea tuturor modelelor; judecata că ceva şi are loc şi nu are loc (principiul contradicţiei) e mulţimea care nu cuprinde nici un model, deci mulţimea vidă. Aici trebuie subliniat că de fiecare dată noi presupunem, într-un sens, un limbaj: căci modelele pe care le luăm în considerare sunt *modelele unui limbaj anumit.*

Această observaţie va fi mai limpede odată ce vrem să explicităm mai mult sensul lui (8.9); căci până acum, desigur, (8.9) nu e încă justificată, după cum viza ideii că o lege logică e mulţimea tuturor modelelor nu este totuşi intuitivă. În acest scop, să procedăm în felul următor: am văzut că, într-o încercare de a spune *ce* sunt judecăţile, s-a formulat ipoteza că o judecată este înţelesul unei propoziţii. Să încercăm deci să vedem care ar fi – în sens model-teoretic – judecata exprimată de o propoziţie. Vom defini:

(8.10) Judecata exprimată de propoziţia φ este mulţimea acelor M astfel încât $M \models \varphi$.

Adică, judecata exprimată de o propoziţie este mulţimea modelelor în care ea este adevărată. Să ne raportăm la $L(S)$. Fie o propoziţie φ a lui $L(S)$; atunci φ exprimă o judecată, şi această judecată este mulţimea tuturor modelelor lui $L(S)$ în care φ e adevărată. E limpede acum ce se întâmplă cu legile logice şi cu contradicţiile:

a) o lege logică φ este adevărată în toate modelele şi deci judecata exprimată de φ este mulţimea tuturor modelelor;

b) o contradicţie ψ nu este adevărată în nici un model şi deci judecata exprimată de ψ este mulţimea vidă.

Este uşor de observat că această abordare a conceptului de judecată satisface exigenţele ce ţin de problema criteriilor de identitate. Într-adevăr, două judecăţi sunt identice dacă au aceleaşi elemente. Judecăţile sunt mulţimi de modele – şi, întrucât avem criterii de identitate pentru modele, avem de asemenea criterii de identitate şi pentru mulţimile de modele. Potrivit principiului extensionalităţii din teoria mulţimilor, două mulţimi sunt identice exact în cazul în care au aceleaşi elemente.

Potrivit acestei înţelegeri a judecăţilor, diversele operaţii cu judecăţi şi relaţii între judecăţi primesc o interpretare foarte elegantă. Astfel:

a) negaţia unei judecăţi este judecata constând din complementara mulţimii respective;

b) conjuncţia a două judecăţi este judecata constând din intersecţia mulţimilor respective;

c) disjuncţia a două judecăţi este judecata constând din reuniunea mulţimilor respective;

d) o judecată implică logic o altă judecată dacă prima este inclusă în a doua etc.

O caracteristică foarte importantă a înţelegerii model-teoretic a judecăţilor este următoarea: potrivit lui (8.10), orice propoziţie exprimă o judecată (acesta e cel puţin cazul lui $L(S)$!). Dar, ţinând seama de (8.9), nu e clar dacă relaţia are sens şi în direcţie inversă: dacă orice mulţime de modele este astfel încât există o propoziţie care o exprimă. În fapt, aşa ceva *nu* se întâmplă. Să privim mai în amănunt această chestiune. Cum am văzut în § 5, o mulţime X de modele se numeşte *elementară* dacă există o propoziţie φ astfel încât X e mulţimea modelelor lui φ; altfel zis, o mulţime X de modele este elementară dacă există o propoziţie φ care exprimă judecata X.

Însă nu toate mulţimile de modele sunt elementare. Că e aşa se poate arăta foarte simplu (cf. şi exerciţiul (26) din § 6). Să luăm cazul limbajului $L(S)$, când S este o mulţime infinită *numărabilă*. Modelele lui $L(S)$ sunt submulţimi ale lui S şi, potrivit unei celebre teoreme a lui Cantor, există o mulţime infinită *nenumărabilă* de mulţimi de modele; de aici decurge imediat că nu putem realiza o corespondenţă biunivocă între mulţimea propoziţiilor lui $L(S)$ (potrivit regulilor de construire a acestora din S, dacă S e infinită numărabilă, atunci mulţimea propoziţiilor lui S va fi tot infinită numărabilă) şi mulţimea mulţimilor de modele ale lui $L(S)$: vor exista mulţimi de modele ale lui $L(S)$ cărora nu le putem pune în corespondenţă nici o propoziţie a lui $L(S)$.

Se ridică atunci întrebarea: nu cumva am definit ***prea larg*** noţiunea de judecată? Dacă o mulţime de modele nu corespunde nici unei propoziţii, de ce ar fi încă numită „judecată"? Există cel puţin două motive în acest sens. În primul rând, e posibil ca o mulţime de modele să nu fie mulţimea modelelor unei propoziţii, ci a unei *mulţimi* de propoziţii. Că există astfel de mulţimi se poate demonstra chiar şi privitor la $L(S)$ (a se vedea exerciţiile 27–28 din § 6). Aceste mulţimi de modele au fost numite în § 5 *elementare în sens larg*. Ele redau ceea ce exprimă nu o propoziţie anume a unui limbaj, ci o mulţime de propoziţii din acel limbaj (sigur, dacă acea mulţime e finită, atunci putem construi conjuncţia acelor propoziţii, care e tot o propoziţie; dar dacă

mulţimea e infinită, nu mai putem proceda astfel). E natural ca aceste mulţimi de modele care nu sunt elementare, dar sunt elementare în sens larg, să fie numite tot judecăţi.

Să luăm un exemplu. Fie următoarea expresie:

$\varphi \rightarrow (\phi \wedge \psi)$

Ea este formulată în metalimbajul lui $L(S)$; semnele „φ" şi „ψ" sunt metavariabile – sunt nume pentru propoziţiile din $L(S)$. De aceea, expresia noastră *nu* este o anumită propoziţie a lui $L(S)$, ci o *schemă* de propoziţii din $L(S)$. Propoziţiile:

$p \rightarrow (p \wedge q)$
$(p \wedge q) \rightarrow ((p \wedge q) \wedge q)$
$(p \vee q) \rightarrow ((p \vee q) \wedge r)$

etc. sunt fiecare propoziţii pe care metapropoziţia noastră le numea. Câte astfel de propoziţii sunt numite de ea? O infinitate (nenumărabilă). Să ne gândim acum la mulţimea tuturor acestor propoziţii, fie Γ aceasta. Propoziţiile din Γ definesc o mulţime de modele elementare în sens larg.

Susţinerea mea e că această mulţime de modele *este* o judecată. Într-adevăr, e judecata după care *conjuncţia se poate extinde*. Sigur, această judecată e falsă (căci conjuncţia – spre deosebire de disjuncţie – nu se poate extinde); însă acest lucru nu are importanţă. Important e altceva: că această judecată exprimă înţelesul lui $\varphi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$ – adică, al tuturor propoziţiilor din Γ.

Există însă şi mulţimi de modele care *nu* sunt nici elementare în sens şi care totuşi ar avea sens să fie numite judecăţi. În $L(S)$ se poate arăta (cf. exerciţiul 27 din § 6) că mulţimile de modele cu un singur element sunt elementare în sens larg. Totuşi, aşa ceva nu se întâmplă în orice condiţii. Bunăoară, se poate arăta că nu există nici o mulţime de propoziţii ale aritmeticii lui Peaus care să fie adevărate numai în modelul standard; altfel zis, mulţimea ce cuprinde doar modelul standard al aritmeticii lui Peano nu este nici elementară, nici elementară în sens larg. Cu toate acestea, în mod intuitiv am vrea să spunem că aritmetica lui Peano exprimă ceea ce se petrece cu *numerele naturale;* adică, am vrea să admitem judecata că *aritmetica lui Peano este despre numerele naturale.* Dar, ea nu e exprimată de nici o propoziţie, şi nici de o mulţime de propoziţii ale aritmeticii lui Peano. Aşadar, abordarea model-teoretică permite să construim judecăţi care, într-un sens, sunt „inefabile".

Să notăm, de asemenea, că admiterea unei identităţi între judecăţi nu face ca abordarea model-teoretică să cadă sub critica lui Quine: căci nu se poate conchide de aici că am fi constrânşi să admitem o relaţie de sinonimie între propoziţii. Într-adevăr, tot ce putem spune este că:

(8.11) Dacă două judecăţi nu sunt identice (şi ele sunt exprimate de două propoziţii), atunci propoziţiile care le exprimă nu sunt sinonime.

Însă relaţia

(8.12) Dacă două judecăţi sunt identice (şi ele sunt exprimate de două propoziţii), atunci propoziţiile care le exprimă sunt sinonime.

nu e valabilă. Bunăoară, propoziţiile $\varphi \vee -\varphi$ şi $\varphi \rightarrow \varphi$ sunt adevărate ambele în toate modelele (şi deci exprimă aceeaşi judecată), însă nu pare corect să zicem că ele sunt sinonime.

Totuşi, s-ar părea că, deşi face falsă relaţia (8.12), înţelegerea model-teoretică a judecăţilor este *prea slabă*; căci nu pare corect să admitem un punct de vedere care face ca toate legile logice să reprezinte exact aceeaşi judecată. E o deosebire între principiul terţului exclus şi cel al identităţii! Această observaţie este foarte pertinentă; probabil că aici se află cel mai mare dezavantaj al înţelegerii model-teoretice a judecăţilor. (Situaţia nu e fără ieşire; s-au produs, de către unii logicieni, modalităţi de a o depăşi. Din păcate însă, nu avem încă la dispoziţie uneltele pentru a arăta în ce constau aceste soluţii).

În continuare, prin judecăţi vom înţelege – în spiritul abordării modeliste – mulţimi de modele. Vom considera că judecăţile sunt purtătorii adevărului. Cu toate acestea, frecvent vom spune că propoziţiile din limbajele considerate sunt adevărate sau false. Această procedură este justificată în sensul următor: orice propoziţie φ poate fi pusă în corespondenţă cu o judecată bine determinată; atunci, ori de câte ori vom spune că o propoziţie φ e adevărată într-un model M, aceasta va avea sensul că modelul M este un element al judecăţii pe care o exprimă propoziţia φ.

Capitolul III

METATEORIA LOGICII DE ORDINUL ÎNTÂI A PREDICATELOR

§ 9. Limbaje şi modele

Trecând de la logica propoziţiilor la cea a predicatelor să începem prin a pune din nou întrebarea centrală pentru orice investigaţie logică: Ce înseamnă că propoziţiile φ_1, φ_2, ... φ_n ... implică logic propoziţia ψ?

Un răspuns satisfăcător ar trebui să cuprindă – aşa cum am văzut pe exemplul elementar al logicii propoziţiilor – trei elemente:

a) O reconstrucţie sintactică a relaţiei de implicaţie logică. Sintactic, implicaţia logică e reconstruită ca *relaţie de deductibilitate*: ψ este demonstrabilă din φ_1, φ_2, ... φ_n, în simboluri φ_1, φ_2, ... $\varphi_n \vdash \psi$.

b) O reconstrucţie semantică a relaţiei de implicaţie logică. În plan semantic relaţia oferită este cea de *consecinţă logică*: ψ este o consecinţă logică a propoziţiilor φ_1, φ_2, ... φ_n, în simboluri φ_1, φ_2, ... $\varphi_n \models \psi$.

c) O aserţiune (sau un grup de aserţiuni) privind raporturile dintre cele două reconstrucţii. În general, e vorba de formularea unui rezultat de *completitudine* (sau *necompletitudine*).

Cele trei elemente jalonează direcţiile pe care vom merge în cercetarea proprietăţilor logicii predicatelor. Primul pas va trebui să constea în construirea precisă a celor două noţiuni cheie: cea sintactică de deductibilitate şi cea semantică de consecinţă logică. În mare, cele două noţiuni sunt generalizări ale noţiunilor corespunzătoare construite la nivelul logicii propoziţiilor. Bunăoară, pentru a elabora în logica predicatelor noţiunea de deductibilitate, va trebui să plecăm de la definiţia acesteia în logica propoziţiilor şi să o lărgim, prin considerarea elementelor specifice (a regulilor specifice, de exemplu) ale logicii predicatelor. Semantic însă, problemele sunt puţin mai complicate.

Într-adevăr, să ne aducem aminte că în definirea relaţiei φ_1, ... $\varphi_n \models \psi$ în logica propoziţiilor, această relaţie are loc ddacă orice model în care

sunt adevărate toate propoziţiile φ_1, ... φ_n este un model în care este adevărată şi propoziţia ψ. Dar ce este un model al acestor propoziţii? Desigur că nu mai putem să tratăm drept modele aceleaşi entităţi care erau modele în cazul logicii propoziţiilor. În orizontul logicii predicatelor, modele vor fi alt fel de entităţi.

Ce fel de entităţi? Pentru a răspunde acestei întrebări, să observăm mai întâi că, atunci când construim modelele în orizontul logicii propoziţiilor, trebuia să ne raportăm la un anumit limbaj $L(S)$. Menţionăm atunci că mulţimea modelelor unui astfel de limbaj $L(S)$ depinde, în anumite privinţe, de mulţimea S a literelor propoziţionale (de pildă, când S era finită, mulţimea modelelor pentru $L(S)$ era infinită; când S era infinit numărabilă, mulţimea modelelor pentru $L(S)$ era infinit nenumărabilă; când S era finită, modelele pentru $L(S)$ erau toate finite etc.).

Morala care decurge de aici e aceea că noţiunea de model trebuie să fie considerată ca relativă: relativă la limbajul ale cărui modele le cercetăm.

În acest capitol, limbajele considerate vor fi mult mai bogate decât limbajul $L(S)$; la rândul lor, modelele pentru acestea vor fi mult mai complexe decât modelele pentru $L(S)$. Aceste limbaje au însă o serie de caracteristici comune, motiv pentru care despre toate vom spune că sunt limbaje de ordinul întâi ale predicatelor (cu unelte mai precise, vom reveni asupra naturii acestor limbaje şi asupra logicii construite în cadrul lor în paragraful 16 mai jos).

Informal vorbind, un limbaj de ordinul întâi al predicatelor – sau pe scurt, un limbaj de ordinul întâi – este un instrument cu ajutorul căruia pot fi făcute enunţuri despre *obiecte*. Aceste obiecte nu trebuie, desigur, să fie considerate numai ca obiecte spaţio-temporale: oameni, animale, galaxii, particule elementare etc. Ca obiecte putem trata numerele naturale, numerele reale ori mulţimile. Într-un limbaj de ordinul întâi se pot formula propoziţii despre aceste obiecte. Propoziţiile pot fi de două feluri. Mai întâi, se formulează propoziţii despre faptul că un obiect are o anumită proprietate sau că două (sau mai multe obiecte) stau într-o anumită relaţie; de asemenea, se pot formula propoziţii despre felul în care, prin intermediul unor funcţii, plecând de la un anumit obiect (sau mai multe obiecte) – argument(e) al(e) acelei funcţii – se obţine un nou obiect – valoarea acelei funcţii pentru acel (sau acele) argument (argumente).

În formularea propoziţiilor de primul fel – precum „Oamenii sunt mamifere", „Electronul are sarcină electrică negativă", „Numărul 3 este mai mic decât numărul 7", „Numărul 4 este succesorul numărului 3", „Mulţimea numerelor este nevidă" etc. – sunt folosite simboluri pentru *proprietăţi* (ca „mamifer", „sarcină electrică negativă") şi pentru *relaţii* între obiecte („mai mic"). Vom spune că aceste simboluri pentru proprietăţi şi relaţii sunt *predicate*. Predicatele sunt unare,

binare, ternare etc., în general *n*-are. Un predicat este *n*-ar dacă atunci când, aplicat unui şir de *n* nume de obiecte, ia naştere o propoziţie. De exemplu, predicatul „om" este unar, căci aplicându-l numelui „Socrate" ia naştere propoziţia „Socrate este om". Predicatul „mai mic" este binar, căci aplicându-l şirului de două numerale 3, 7 obţinem propoziţia „3 este mai mic decât 7".

În formularea propoziţiilor de al doilea fel – precum „5 + 7 = 12" sau „Succesorul lui 3 este 4" – sunt folosite simboluri *funcţionale*. Ca şi predicatele, funcţiile sunt unare (funcţia succesor, de pildă) binare (funcţia adunare, de pildă), în general *n*-are. Trebuie să fim atenţi aici la următorul lucru: în limbajul de ordinul întâi funcţiilor le corespund simboluri funcţionale. Astfel, „+" este un simbol care aparţine limbajului aritmeticii şi care denotă o funcţie binară – operaţia de adunare între numere.

În general, deci, un limbaj de ordinul întâi va cuprinde:

a) simboluri care denotă obiecte;
b) simboluri care denotă proprietăţi şi relaţii;
c) simboluri care denotă funcţii.

Într-un limbaj de ordinul întâi nu există însă simboluri care să denote proprietăţi de proprietăţi sau proprietăţi de funcţii. De pildă, într-un limbaj de ordinul întâi nu vom putea formula propoziţia „A fi raţional este o proprietate esenţială a omului", fiindcă „esenţial" este o expresie care denotă o proprietate a unei proprietăţi (raţional) a unui obiect (a lui Socrate, să zicem); or, astfel de expresii nu apar într-un limbaj de ordinul întâi. De asemenea, nu putem formula într-un atare limbaj nici propoziţia „Adunarea numerelor naturale este comutativă", deoarece „comutativ" este o expresie care denotă o proprietate a unei funcţii (adunarea). Desigur, faptul că adunarea este comutativă poate fi exprimat prin propoziţia:

Pentru orice numere x şi y, $x + y = y + x$.

care, aşa cum vom vedea, este o propoziţie a limbajului de ordinul întâi al aritmeticii. Însă aici nu apare expresia „comutativ", nu se folosesc, deci, simboluri care denotă proprietăţi de funcţii.

O problemă foarte importantă pentru logica de ordinul întâi a predicatelor este următoarea: ce predicate pot fi denotate cu mijloacele limbajelor de ordinul întâi? Exemplul comutativităţii sugerează că putem folosi limbaje de ordinul întâi pentru a comunica informaţii care, la prima vedere, făceau necesare mijloace mai puternice, bunăoară simboluri pentru predicate de funcţii. Teoremele asupra logicii de ordinul întâi a predicatelor pe care le vom cerceta în cele ce urmează vor dovedi că situaţia este şi mai complicată: aparent, în logica de ordinul

întâi putem folosi simboluri care să denote proprietăţi ale mulţimilor (care sunt tratate ca obiecte) precum „finit", „infinit", „infinit numărabil", „infinit nenumărabil" etc. Aparent, pentru a comunica informaţia că mulţimea X este finită putem să folosim mijloacele simbolice ale unui limbaj de ordinul întâi. Într-adevăr, aici „X" este un simbol care denotă un obiect (o mulţime), iar „finit" este un simbol care denotă o proprietate de obiecte. Dar, aşa cum se va dovedi în paragrafele de mai jos, „finit" nu este un predicat care să poată fi manevrat în logica de ordinul întâi, deşi realmente denotă o proprietate a obiectelor considerate (= a mulţimilor).

Să formulăm acum în chip precis definiţia limbajelor de ordinul întâi. Un astfel de limbaj L este o colecţie de simboluri. Simbolurile vor fi împărţite în trei grupuri:

a) simboluri constante individuale;
b) simboluri predicative;
c) simboluri funcţionale.

Vom folosi litere latine mici c_0, c_1, ... c_n ca simboluri constante individuale, majuscule latine P_0, P_1, ... P_n ca simboluri predicative şi majuscule latine F_0, F_1, ... F_n ca simboluri funcţionale. Când, de exemplu, limbajul L este finit, îl putem scrie astfel:

$$L = \{P_0, \ldots P_n; F_0, \ldots F_m ; c_0, \ldots c_q\}$$

Uneori, simbolurile care apar în limbaj sunt standard. Astfel, limbajul teoriei mulţimilor (în varianta Zermelo–Fraenkel) cuprinde numai un simbol predicativ (pentru predicatul binar al apartenenţei), dar nici un simbol constantă individuală şi nici un simbol funcţional. Deci

$$L = \{\in\}$$

Limbajul aritmeticii cuprinde o constantă individuală – care denotă numărul zero – şi trei simboluri funcţionale, care denotă funcţia succesor, operaţiile de adunare şi înmulţirea. Aşadar, acest limbaj poate fi scris sub forma:

$$L = \{S, +, \cdot, 0\}$$

Adesea este nevoie să trecem de la un limbaj L la un altul L', care are toate simbolurile lui L, plus altele. În aceste cazuri scriem $L \subseteq L'$ şi spunem că L' este o *extindere* a lui L, sau că L este o *restrângere* a lui L'. Cum L şi L' sunt mulţimi de simboluri, vom scrie şi $L' = L \cup X$, unde X este mulţimea noilor simboluri.

Să trecem acum din planul sintactic în cel semantic şi să definim *modelele pentru limbajul L*. Un model M este un model *pentru* L dacă putem interpreta în M toate simbolurile din L; altminteri, nu avem nici o îndrituire să spunem că M este un model pentru L. Ideea este simplă:

a) dacă c este o constantă individuală a lui L, atunci acestui simbol trebuie să-i corespundă în modelul M un obiect din M;

b) dacă P este un simbol predicativ n-ar, atunci lui P trebuie să-i corespundă în M o *relaţie* n-ară între obiectele din M;

c) dacă F este un simbol funcţional m-ar, atunci lui F trebuie să-i corespundă în M o funcţie m-ară de la obiectele din M la obiectele din M.

Aceste operaţii prin care simbolurilor din L facem să le corespundă obiecte, relaţii sau funcţii din M le vom numi *interpretări* şi le vom nota cu I, I_1, I_2 etc.

Un model M va cuprinde aşadar o mulţime nevidă de obiecte, numită *domeniul* lui M. În acest domeniu.

a) fiecărei constante individuale c a lui L îi corespunde un obiect constant x din A, în simboluri $I(c) = x \in A$ (să subliniem aici că, potrivit notaţiei folosite, „x" nu este o variabilă individuală, aşa cum se obişnuieşte să se scrie adesea în logică; simbolul „x" este folosit ca nume pentru un obiect constant, anume din A);

b) fiecărui predicat n-ar P al lui L îi corespunde o relaţie n-ară R între obiectele din domeniul A, în simboluri $I(P) = R \subseteq A^n$;

c) fiecărei funcţii m-are F a lui L îi corespunde o funcţie m-ară G, definită pe mulţimea A^m, care ataşează fiecărui m-tuplu de obiecte din A un obiect din A, în simboluri: $I(F) = G: A^m \rightarrow A$.

Aşadar, dacă $L = \{P_0, \ldots P_n; F_0, \ldots F_m; c_0, \ldots c_q\}$, atunci un model pentru L este o structură $M = \langle A, R_0, \ldots R_n; G_0, \ldots G_m; x_0, \ldots x_q\rangle$. Vom observa, de asemenea, că în aceeaşi structură M putem interpreta în moduri diferite simbolurile lui L. De pildă, putem face astfel încât $I(P_1) = R_1$ şi $I(P_2) = R_2$, dar şi $I'(P_1)) = R_2$ şi $I'(P_1) = R_1$. De aceea, nu este suficient să spunem: M este un model pentru L; trebuie spus: *M este un model pentru L sub interpretarea I*. Pentru a fi riguroşi, ori de câte ori avem în vedere un model al unui limbaj L e deci nevoie să menţionăm explicit interpretarea I pe care o admitem. De multe ori însă, atunci când pentru o structură M nu considerăm decât o singură interpretare, ori când interpretarea este presupusă, nu vom mai menţiona explicit interpretarea admisă.

Să luăm un exemplu. Fie L = {poet, romacier} un limbaj care nu cuprinde decât două predicate unare. Un model M pentru L va fi deci o structură de tipul $\langle A, R_1, R_2\rangle$. Să zicem că A este mulţimea cetăţenilor români la 1 ianuarie 1994, iar R_1 şi R_2 sunt două submulţimi ale lui A; să presupunem în plus că R_1 este mulţimea poeţilor, iar R_2 este mulţimea romancierilor (în ambele cazuri, aceste persoane sunt cetăţeni români). Potrivit unei interpretări I a limbajului nostru, predicatului „poet" îi corespunde mulţimea R_1 (a poeţilor), iar

predicatului „romacier" îi corespunde mulţimea R_2 (a romancierilor). E limpede că modelul M al lui L este un *model intenţionat* al limbajului L, fiindcă el descrie o situaţie care efectiv are loc. Să considerăm însă o altă interpretare, I', care ataşează predicatului „poet' mulţimea R_2 (a cetăţenilor care, de fapt, sunt romancieri), iar predicatului „romancier" mulţimea R_1 (a cetăţenilor care, de fapt, sunt poeţi). Acest model M al lui L, sub interpretarea I', desigur că nu descrise o situaţie care efectiv are loc; dar el descrie o *situaţie posibilă*, o situaţie în care cei care de fapt sunt poeţi ar fi romancieri, iar cei care de fapt sunt romancieri ar fi poeţi.

Pentru a evidenţia, atunci când este cazul, care este interpretarea cu care se lucrează, vom face apel la o pereche de forma (M, I) pentru a vorbi despre modelul M. Dar dacă interpretarea I poate fi identificată fără nici o dificultate, pentru a vorbi despre modele ne vom referi pur şi simplu la structuri de tipul M.

Fie acum două modele (M, I) şi (M', I') ale limbajului L. Vom spune că relaţia R din modelul (M, I) *corespunde* relaţiei R' din modelul (M', I') dacă există un predicat P al lui L şi $I(P) = R$, $I'(P) = R'$. Convenţii similare pot fi introduse şi pentru celelalte simboluri ale lui L.

Să presupunem că L' este o extindere a lui L; aşadar, există o mulţime X de simboluri care nu aparţin lui L, şi $L' = L \cup X$. Fie (M, I) un model al lui L. Putem extinde interpretarea I astfel încât în A să fie interpretate toate simbolurile din X. Vom numi interpretarea obţinută, I', extinderea lui I la limbajul L'. Acum, (M, I') este un model al lui L'; vom spune că (M, I') este extinderea lui (M, I) la limbajul L' sau că (M, I) este restrângerea lui (M, I') la L.

Se numeşte *cardinalul* sau *puterea* modelului M cardinalul mulţimii A, deci $/A/$. Dacă A este finită, spunem că M este un model finit; dacă A este infinit numărabilă, spunem că M este infinit numărabil; dacă A este infinit nenumărabilă, spunem că M este infinit nenumărabil.

Cele mai importante noţiuni care pot fi introduse în acest moment sunt cele de *izomorfism* între două modele şi de *submodel.*

(9.1) Două modele M şi N' ale lui L sunt izomorfe, în simboluri $M \cong M'$, ddacă există o funcţie bijectivă f: $A \to A'$ astfel încât

a) Dacă R este o relaţie n-ară din M, iar R' este relaţia corespunzătoare acesteia din M', atunci oricare ar fi obiectele $x_1, \ldots x_n$ din A,

$R(x_1, \ldots x_n)$ ddacă $R'(f(x_1), \ldots f(x_n))$

b) Dacă G este o funcţie m-ară din M, iar G' funcţia corespunzătoare ei din M', atunci oricare ar fi obiectele $x_1, \ldots x_m, x_{m+1}$ din A, dacă $G(x_1, \ldots x_m) = x_{m+1}$ atunci

$G'(f(x_1), \ldots f(x_m)) = f(x_{m+1})$

c) Oricare ar fi obiectul constant x din M şi obiectul corespunzător lui x' din M',

$f(x) = x'$.

Condiţiile cuprinse în definiţia (9.1) sunt intuitive. În primul rând, funcţia f face ca fiecare obiect din domeniul A al lui M să aibă ca imagine un obiect din domeniul A' al lui M'. Acum, condiţia (c), de exemplu, spune următoarele: să presupunem că există o constantă individuală c în limbajul L. Prin interpretare, în modelul M ei îi corespunde un obiect din A, obiectul x să zicem. Acestui obiect din A prin funcţia f i se ataşează un obiect x' din domeniul A' al modelului M'. Condiţia (c) ne asigură că acest obiect x' din A' este obiectul prin care este interpretată în M' constanta c a limbajului L. Sau, condiţia (a) spune următoarele: fie un predicat P n-ar al limbajului L. În M, lui îi corespunde o relaţie n-ară R între obiectele domeniului A. În M' lui îi corespunde o relaţie n-ară R' între obiectele domeniului A'. Acum fie obiectele x_1, ... x_n din A care se află între ele în relaţia R. Condiţia (a) ne asigură că relaţia R' are loc între obiectele din A' care corespund prin funcţia f acestor obiecte.

(9.2) Un model M' se numeşte submodel al lui M, în simboluri $M' \subseteq M$, dacă $A' \subseteq A$ şi

a) Orice relaţie R' n-ară din M' este restricţia la A' a relaţiei R corespunzătoare din A, în simboluri $R' = (A')^n \cap R$.

b) Orice funcţie m-ară G' din M' este restricţia la A' a funcţiei G corespunzătoare din M, în simboluri $G' = G/(A')^m$.

c) Fiecare obiect constant din M' este obiectul constant corespunzător din M.

Invers, dacă $M' \subseteq M$, spunem că M este o extindere a lui M'.

Se arată uşor că:

(9.3) Dacă $M \cong M'$, atunci $/A/ = /A'/$.

(9.4) Dacă $M \subseteq M'$ şi $M' \subseteq M''$, atunci $M \subseteq M''$.

(9.5) Dacă $M \subseteq M'$, atunci $/A/ \leq /A'/$.

(9.6) Relaţia $\cong$ este o relaţie de echivalenţă (adică, este reflexivă, simetrică şi tranzitivă).

§ 10. Formalizarea limbajelor de ordinul întâi

Dată fiind noţiunea de model introdusă în paragraful anterior, până în prezent nu putem decât să spunem care e interpretarea unui simbol al limbajului L; nu e însă posibil încă să decidem dacă anumite propoziţii sunt adevărate sau nu într-un model. Altfel zis, dacă φ este o propoziţie şi M este un model, nu putem încă să răspundem la întrebarea: Când este adevărată propoziţia φ în M?

Un răspuns satisfăcător necesită două elemente:

a) să se precizeze ce este o *propoziţie* φ;

b) să se precizeze ce înseamnă că o propoziţie φ *este adevărată* într-un model M, în simboluri $M \models \varphi$; aşadar, să se construiască relaţia semantică $\models$.

Răspunsul la punctul (a) va consta în *a formaliza limbajele de ordinul întâi*; la punctul (b), esenţială se va dovedi noţiunea de *satisfacere*. În acest paragraf vom aborda primul punct.

Pentru a formaliza un limbaj de ordinul întâi, fie L acesta, trebuie parcurşi doi paşi:

1) să se construiască noţiunea de *formulă* a lui L;

2) să se construiască limbajul L ca *sistem formal.*

Pentru aceasta este necesară utilizarea următoarelor *simboluri logice:*

(i) conective logice: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;

(ii) variabile individuale: v, v_0, v_1, ... v_n;

(iii) identitatea: = ;

(iv) cuantificatorul: $\forall$;

(v) paranteze: (,).

Să precizăm, mai întâi, că $\forall$ se citeşte: *pentru toţi*; apoi, identitatea este un simbol pentru o relaţie binară între obiecte. În sfârşit, din motive de economie nu vom mai folosi în cele ce urmează decât conectivele logice – şi $\wedge$. Căci, cum se ştie, toate celelalte pot fi definite cu ajutorul acestora două. Acest lucru va fi adesea presupus.

În logica predicatelor, definiţia formulei este mai dificilă decât în cazul logicii propoziţionale. Principala complicaţie provine din faptul că în logica predicatelor unele şiruri de simboluri sunt formule, iar altele sunt termeni (în timp ce, desigur, alte şiruri de simboluri nu sunt nici formule, nici termeni). Prin *termeni* vom înţelege, informal, expresii care nu stau pentru stări de lucruri, ci pentru obiecte. Definiţia termenilor lui L va fi formulată în mod inductiv.

(10.1) Definiţia termenilor lui L:

a) o variabilă este un termen;

b) un simbol constant din L este un termen;

c) dacă F este un simbol funcţional m-ar din L şi t_1, ... t_m sunt termeni, atunci $F(t_1, \ldots t_m)$ este un termen;

d) un şir de simboluri logice sau ale lui L este un termen dacă şi numai dacă se poate obţine prin aplicarea de un număr finit de ori a clauzelor (a)–(c).

Bunăoară, în cazul aritmeticii, termenii vor fi, de exemplu, 0, $S0$, v_0, $0+0$, $0 + v_0$, $S0 + v_0$ etc. Intuitiv, termenii sunt expresiile care denotă numerele naturale.

(10.2.1) Formulele atomare ale lui L sunt şirurile de simboluri logice sau din L de forma:

a) $t_1 = t_2$, unde t_1 şi t_2 sunt termeni ai lui L;

b) $P(t_1, \ldots t_n)$, unde P este un simbol predicativ n-ar al lui L, iar $t_1, \ldots t_n$ sunt termeni ai lui L.

(10.2.2) Definiţia formulelor lui L:

a) orice formulă atomară a lui L este formulă;

b) dacă φ şi ψ sunt formule, atunci $(\varphi \wedge \psi)$ şi $(- \varphi)$ sunt formule;

c) dacă φ este o formulă iar v este o variabilă, atunci $(\forall v)\varphi$ este o formulă;

d) un şir de simboluri logice sau ale lui L este o formulă dacă şi numai dacă se poate arăta că este formulă prin aplicarea de un număr finit de ori a clauzelor (a)–(c).

În mai multe ocazii va fi nevoie să folosim noţiunea de *subformulă* a unei formule φ a lui L. Intuitiv, „subformulă a lui φ" desemnează orice parte a lui φ care este ea însăşi formulă. În chip precis, noţiunea e dată inductiv prin definiţia următoare:

(10.3) ψ este o subformulă a lui φ ddacă:

a) φ este o formulă atomară şi ψ este φ; sau

b) φ este o formulă $(- \varphi_1)$ şi ψ este φ sau o subformulă a lui φ_1; sau

c) φ este o formulă $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ şi ψ este φ sau este o subformulă a lui φ_1 sau a lui φ_2; sau, în sfârşit,

d) φ este o formulă $(\forall v)\varphi_1$ şi ψ este φ sau este o subformulă a lui φ_1.

În continuare, este preferabil să facem unele abrevieri:

$(\exists v)\varphi$ în loc de $- (\forall v) (- \varphi))$

$- \varphi$ în loc de $(- \varphi)$

$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \ldots \varphi_n$ în loc de $(\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge (\ldots \varphi_n)\ldots)$

Două noţiuni importante şi corelate sunt cele de *variabilă liberă* şi *variabilă legată*.

(10.4.1) Variabila v este liberă în termenul t ddacă

a) t este v; sau

b) t este $F(t_1, \ldots t_n)$ şi există termenul t_i $(1 \leq i \leq n)$ astfel încât v este liberă în t_i.

(10.4.2) Variabila v este liberă în formula φ ddacă

a) φ este $t_1 = t_2$ şi v este liberă în t_1 sau în t_2; sau

b) φ este $P(t_1, \ldots t_n)$ şi v este liberă în unul din $t_1, \ldots t_n$; sau

c) φ este $- \psi$ şi v este liberă în ψ; sau

d) φ este $\psi \wedge \chi$ şi v este liberă în ψ sau în χ; sau

e) φ este $(\forall v_1)\psi$ şi v este liberă în ψ şi v_1 este diferită de v.

(10.4.3) Variabila v este legată în φ ddacă v nu este liberă în φ şi v este liberă într-o subformulă a lui φ.

În cele ce urmează vom scrie $t(v_0, \ldots v_n)$ pentru un termen t ale cărui variabile sunt elemente ale mulţimii $\{v_0, \ldots v_n\}$; şi vom scrie $\varphi(v_0, \ldots v_n)$ pentru o formulă ale cărei variabile libere sunt cuprinse în mulţimea $\{v_0, \ldots v_n\}$.

Cu ajutorul noţiunii de variabilă liberă se poate defini acum noţiunea de propoziţie a lui L:

(10.5) O propoziţie a lui L este o formulă a lui L fără nici o variabilă liberă.

Vom folosi literele σ, τ, θ, eventual cu indici, pentru propoziţiile lui L.

Să notăm acum următoarea teoremă:

(10.6) Mulţimea tuturor formulelor lui L este:

a) infinit numărabilă, când L este o mulţime finită sau infinit numărabilă;

b) de acelaşi cardinal cu L, când L este infinit nenumărabilă.

Acum vom trece la cel de-al doilea pas al formalizării limbajului de ordinul întâi L: construirea unui *sistem formal*. În acest scop, avem nevoie de două ingrediente: *axiome logice* şi *reguli de inferenţă*.

I. *Axiomele logice*. Acestea sunt de trei feluri:

1) Axiome propoziţionale. Dacă φ este o tautologie a lui $L(S)$, iar ψ este o formulă a lui L care se obţine din φ substituind simultan şi uniform literele propoziţionale din φ cu formule ale lui L, atunci ψ este o axiomă propoziţională a lui L. Formula ψ obţinută astfel se numeşte *tautologie a lui L*.

2) Axiome ale cuantificatorilor. Acestea sunt de două tipuri:

(i) Dacă φ şi ψ sunt formule ale lui L iar v nu este liberă în φ, atunci următoarea formulă este axiomă:

$(\forall\ v)\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\forall\ v)\psi)$

(ii) Dacă φ şi ψ sunt formule ale lui L iar ψ se obţine din φ înlocuind fiecare apariţie liberă a variabilei v cu termenul t în care nu apare nici o variabilă care este legată în φ, atunci următoarea formulă este axiomă:

$(\forall\ v)\ \varphi \rightarrow \psi$

3) Axiome ale identităţii. Fie v şi v' variabile, $t(v_0, \ldots v_n)$ un termen, iar $\varphi(v_0, \ldots v_0)$ o formulă atomară. Atunci sunt axiome:

(i) $v = v$

(ii) $v = v' \rightarrow t(v_0, \ldots v_{i-1}, v, v_{i+1}, v_n) = t(v_0, \ldots v_{i-1}, v', v_{i+1}, v_n)$

(iii) $v = v' \rightarrow \varphi(v_0, \ldots v_{i-1}, v, v_{i+1}, v_{i+1},) \rightarrow \varphi(v_0, \ldots v_{i-1}, v, v_{i+1}, v_n)$.

Binecunoscutele proprietăţi ale identităţii se demonstrează uşor:

(10.7) Identitatea este reflexivă, tranzitivă, simetrică. (Este deci o relaţie de echivalentă).

Demonstraţie. Reflexivitatea este exprimată prin (i). Simetria identităţii se demonstrează luând în (iii) pe φ ca $v_1 = v$. Atunci formula următoare este axiomă:

$$v = v' \rightarrow (v = v \rightarrow v' = v)$$

Prin logica propoziţională avem

$$v = v \rightarrow (v = v' \rightarrow v' = v)$$

şi, ţinând seamă de (i), prin modus ponens deducem

$$v = v' \rightarrow v' = v, \text{ q.e.d.}$$

Pentru a arăta că identitatea este tranzitivă, se ia în (iii) formula φ ca $v_0 = v_1$. Avem:

$$v = v' \rightarrow (v = v_1 \rightarrow v' = v_1)$$

iar prin logica propoziţiilor se obţine:

$$(v = v' \wedge v = v_1) \rightarrow v' = v_1$$

Ţinând cont de simetria identităţii, aplicată formulei $v = v'$, decurge:

$$(v' = v \wedge v = v_1) \rightarrow v' = v_1, \text{ q.e.d.}$$

II. *Regulile de inferenţă.* Alături de regula de detaşare (modus ponens), în sistemul L se acceptă:

Regula generalizării: din φ se inferă $(\forall v)\varphi$.

Dată fiind construcţia sistemului formal L, este posibil să introducem alte noţiuni, precum: 1) noţiunea de mulţime consistentă; 2) noţiunea de teoremă a lui L; 3) relaţia: σ este deductibilă din mulţimea de propoziţii Σ; 4) noţiunea de mulţime maximal consistentă (în L) de propoziţii etc. În cazul logicii predicatelor, definirea acestor noţiuni nu ridică probleme speciale faţă de cazul logicii propoziţionale. Ceea ce trebuie totuşi avut în vedere e, pe de o parte, faptul că în logica predicatelor sunt două reguli de inferenţă şi, pe de altă parte, faptul că în logica predicatelor în inducţia asupra complexităţii formulelor apar formule de tipul $(\forall v)\varphi$ De pildă, ţinând seamă de aceste fapte, relaţia $\Sigma \vdash \sigma$ (σ este deductibilă în L din mulţimea Σ de propoziţii) se obţine modificând definiţia (5.8) în felul următor:

(10.8) Propoziţia φ este deductibilă în L din mulţimea Σ de propoziţii, în simboluri $\Sigma \vdash \varphi$, ddacă există un şir finit de formule $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ astfel încât $\varphi = \varphi_n$ şi orice formulă φ_m $(0 \leq m \leq n)$ este sau o tautologie a lui L, sau aparţine lui Σ, sau este inferată prin regula detaţării din două formule $\varphi_{m'}$ şi $\varphi_{m''}$ care apar mai devreme în şir (deci: $m' < m$, $m'' < m$), sau, în sfârşit, φ_m este inferată prin regula generalizării dintr-o formulă $\varphi_{m'}$ care apare mai devreme în şir.

Dat fiind faptul că în acest loc nu apar dificultăţi speciale care ţin de logica predicatelor, nu vom repeta demonstraţiile teoremelor care urmează. Ele sunt lăsate ca exerciţii. În teoremele ce urmează, Σ este o mulţime de propoziţii, iar σ şi τ sunt propoziţii.

(10.9) Σ este consistentă ddacă orice submulţime finită a lui Σ este consistentă.

(10.10) Dacă Σ este maximal consistentă, atunci oricare ar fi propoziţiile σ şi τ,

a) $\Sigma \vdash \sigma$ ddacă $\sigma \in \Sigma$;

b) $\sigma \notin \Sigma$ ddacă – $\sigma \in \Sigma$;

c) $\sigma \wedge \tau \in \Sigma$ ddacă $\sigma \in \Sigma$ şi $\tau \in \Sigma$.

(10.11) Teorema deducţiei. $\Sigma \cup \{\sigma\} \vdash \varphi$ ddacă $\Sigma \vdash \sigma \rightarrow \varphi$. (Atenţie: Σ este o mulţime de propoziţii; conform convenţiei făcute, σ e tot o propoziţie; φ este o formulă, deci poate fi o propoziţie, deşi nu e obligatoriu să fie astfel).

(10.12) Teorema lui Lindenbaum. Orice mulţime Σ consistentă de propoziţii din L poate fi extinsă la o mulţime maximal consistentă de propoziţii din L.

Fie acum $\Sigma = \phi$ (mulţimea vidă). Vom spune că σ este o *teoremă a lui* L, în simboluri $\vdash \sigma$, ddacă $\phi \vdash \sigma$.

§ 11. Noţiunea de satisfacere

Fie propoziţia

(1) Bush este american.

Ea este adevărată numai dacă Bush are o anumită proprietate, anume aceea că

(2) *El* este american.

Am subliniat pronumele „el" pentru a arăta că denotă acea persoană care satisface proprietatea de a fi american. Iar respectiva persoană are proprietatea aceea indiferent de felul în care o numim în limbajul nostru, mai mult, indiferent de faptul că noi avem sau nu un nume pentru a vorbi despre ea.

Propoziţia (1) este formulată într-un limbaj – limba română. În (1) apare o constantă individuală – „Bush" – şi un predicat unar – „american". Expresia (2) arată care este starea de fapt pe care o denotă propoziţia (1), anume că acea persoană pe care o denotă numele „Bush", deci el, acel om, posedă o anumită proprietate, proprietatea de a fi american – şi pe care limbajul nostru o surprinde cu ajutorul predicatului „american". Starea de fapt nu depinde, desigur, de faptul că în limbaj s-a întâmplat să folosim o anumită expresie – constanta individuală „Bush" – pentru a vorbi despre acea persoană; putem să folosim şi alte expresii în acest scop, bunăoară „urmaşul lui Reagan la Casa Albă" sau „vicepreşedintele S.U.A. în timpul administraţiei Reagan" etc.; după cum starea de fapt ar fi existat chiar dacă limba română nu ar fi avut la dispoziţie nici o expresie care să denote acea persoană.

Acea persoană *are* (sau: *posedă*; sau: *satisface*) proprietatea de a fi american. Relaţia exprimată aici, între o persoană şi o proprietate este una care se constituie

la nivelul lumii, deci este o relaţie care are loc (sau nu are loc) în lume (lumea reală, în particular). Pe de altă parte însă, relaţia dintre numele „Bush" şi predicatul „american" este una sintactică: cele două simboluri sunt puse împreună în limbaj pentru a forma o propoziţie. Când ne întrebăm acum dacă (1) este adevărată, raportăm la „lumea reală" această propoziţie. Spunem că ea este adevărată atunci când persoana denotată de „Bush" satisface proprietatea exprimată de predicatul „american".

Din cele spuse decurge că *a satisface* este o relaţie între un obiect şi o proprietate; mai în general, între un şir x_1, ... x_n de obiecte şi o relaţie n-ară. Spunem că obiectul sau obiectele din şir satisfac proprietatea sau relaţia respectivă. În felul în care a fost construită aici relaţia de satisfacere, ea nu implică în nici un fel considerente de natură sintactică; ea exprimă ceea ce se întâmplă la nivelul unui model sau al altui model al limbajului.

În cele ce urmează relaţia de satisfacere va primi însă un cu totul alt înţeles. Ea va fi construită ca un raport între un predicat n-ar şi un şir x_1, ... x_n de obiecte; de pildă, ca un raport între un predicat unar şi un obiect. Intuitiv, în acest din urmă caz, susţinerea că obiectul x satisface predicatul P va însemna că *acest obiect* posedă proprietatea exprimată de predicatul P. De pildă, persoana Bush satisface predicatul „american" (predicatul, nu proprietatea!). Trebuie accentuat aici următorul lucru: un obiect x poate să satisfacă un predicat P indiferent de numele pe care l-am folosit pentru a identifica obiectul x şi îl satisface chiar dacă acest obiect nici nu are un nume în limbajul din care face parte P.

Concluzia care decurge de aici este următoarea: criteriile folosite pentru a determina dacă o propoziţie ca (1) este adevărată *nu* sunt aceleaşi cu cele folosite pentru a determina dacă Bush – persoana Bush – satisface predicatul „american". Într-adevăr, în cazul propoziţiei (1) se procedează astfel:

a) se determină persoana care reprezintă interpretarea constantei „Bush" în modelul M considerat (în cazul nostru, modelul este o parte a lumii reale);

b) se determină prin ce proprietate a fost interpretat în M predicatul „american";

c) se cercetează dacă persoana respectivă face parte din mulţimea prin care s-a interpretat predicatul.

Dar, pentru a determina dacă persoana Bush satisface predicatul „american", nu este nevoie de pasul (a). Lipsa acestei constrângeri creează posibilitatea ca un predicat să fie satisfăcut de obiecte care nu au nume în limbaj. Să presupunem, de exemplu, că limbajul L conţine predicatul „număr real". Atunci, pentru a determina valoarea de adevăr a propoziţiei

(3) 0 este număr real.

se procedează potrivit paşilor (a)–(c). Cum în limbaj există însă un număr cel mult infinit numărabil de nume pentru numere, înseamnă că prin procedura (a)–(c)

nu se poate conchide decât despre elementele unei mulţimi infinit numărabile de numere reale că satisfac predicatul „număr real". Dar mulţimea numerelor reale este infinit nenumărabilă. Ca urmare, procedura (a)–(c) nu permite să afirmăm că şi numerele pentru care nu există nume în limbaj satisfac predicatul „număr real". Însă, dacă este dată la o parte condiţia (a), se poate pune problema dacă este sau nu număr real şi un obiect care nu e numit în *L*.

Utilizarea relaţiei de satisfacere în felul menţionat aici prezintă şi un alt avantaj. Fie propoziţia lui *L*:

(4) Orice număr real între 0 şi 1 este mai mic decât 3.

Propoziţia (4) este adevărată atunci când fiecare număr aflat între 0 şi 1 satisface predicatul „mai mic decât 3". Pentru a determina dacă se întâmplă aşa, trebuie să luăm fiecare număr *x* şi să-l comparăm cu numărul 3. Dacă de fiecare dată se obţine rezultatul că acel număr este mai mic decât 3, atunci se poate conchide că (4) este adevărată.

Să presupunem însă că vrem să aplicăm procedura descrisă de (a)–(c) pentru a determina dacă (4) este adevărată. Pentru acesta, trebuie să producem propoziţii de forma (1), deci propoziţii în care, alături de predicatul „mai mic decât 3", apar nume proprii pentru numerele reale considerate, de pildă „0", „1/2", „*ln*2", „1" etc. Se poate spune atunci ceva de genul următor: o propoziţie de forma lui (4), deci de forma

(5) $(\forall\ v)\ P(v)$

este adevărată ddacă rezultatul punerii oricărui nume propriu pentru obiectele din domeniu în locul veriabilei *v* în expresia $P(v)$ este o propoziţie adevărată. De pildă, (4) e adevărată ddacă ori de câte ori înlocuind în formula „*v* este mai mic decât 3" variabila *v* cu un nume propriu pentru un număr real aflat între 0 şi 1, obţinem o propoziţie adevărată. Or, acest criteriu este inadecvat, fiindcă deşi prin respectiva înlocuire obţinem desigur numai propoziţii adevărate, totuşi încă nu putem spune că (4) e adevărată, fiindcă în (4) nu se vorbeşte numai despre numerele reale dintre 0 şi 1 care au nume, ci despre *toate* numerele reale dintre 0 şi 1, afirmându-se că *toate* sunt mai mici decât 3. (Asupra acestei proceduri vom reveni mai jos, în capitolul IV, când vom discuta cuantificarea substituţională).

Dar chiar dacă uneori avem nume proprii pentru toate obiectele, încă e posibil ca strategia descrisă mai sus, bazată pe procedura (a)–(c), să nu dea rezultate corecte. Fie următorul exemplu: pe coperta cărţii pe care o citeşte băiatul meu Andrei cu o deosebită plăcere este trecut numele autorului: Tudor Arghezi. Cum „Tudor Arghezi" este pseudonimul lui Ion N. Theodorescu, înseamnă că Ion N. Theodorescu satisface predicatul „poet apreciat în mod deosebit de Andrei". Dar propoziţia

(6) Ion N. Theodorescu este un poet apreciat în mod deosebit de Andrei. e falsă, fiindcă Andrei nu ştie că „Tudor Arghezi" denotă aceeaşi persoană ca şi „Ion N. Theodorescu"" Pe de altă parte însă, întrucât lui Andrei îi place cartea scrisă de Tudor Arghezi, pe care el o citeşte, înseamnă că este adevărată propoziţia

(7) Tudor Arghezi este un poet apreciat în mod deosebit de Andrei.

Comparând propoziţiile (6) şi (7), ţinând cont de faptul că ele au valori de adevăr diferite, vom conchide: situaţia că persoana Ion N. Theodorescu satisface predicatul „poet apreciat în mod deosebit de Andrei" (în timp ce propoziţia (6) e falsă!) arată că procedura (a)–(c) nu reuşeşte să dea seamă de toate cazurile în care un obiect sau o persoană satisface un predicat.

Exemplul propoziţiilor de tip (5) dovedeşte în plus că, pentru a construi în mod precis noţiunea de satisfacere, este nevoie să se acorde o atenţie specială propoziţiilor în care apar cuantificatori. În al doilea rând, va trebui să generalizăm noţiunea de satisfacere: va trebui să admitem că ea se poate aplica nu numai predicatelor din *L*, ci tuturor predicatelor pe care le putem construi cu ajutorul predicatelor din *L*. Altfel zis, va trebui să putem să o aplicăm tuturor *formulelor* lui *L*. Într-un caz particular, când formulele considerate au o singură variabilă liberă, vom avea deci să determinăm dacă e adevărată o propoziţie de forma

(5') $(\forall\ v)\varphi$

Să luăm, de pildă, propoziţia

(8) Există un număr real între 0 şi 1 mai mic decât 4/5 şi mai mare decât 3/4.

Cum determinăm dacă (8) este adevărată? Dacă definiţia relaţiei de satisfacere e dată numai pentru predicatele lui *L*, nu pentru orice φ, nu vom putea să determinăm valoarea de adevăr a lui (8), în general a unei propoziţii de forma

(9) $(\exists\ v)(P_1(v) \wedge P_2(v))$

Fie acum φ o formulă în care apar – libere sau legate – variabile din mulţimea $\{v_0, ..., v_n\}$. Problema este de a determina când un şir de $n + 1$ obiecte $x_0, ..., x_n$ satisface formula φ. Definiţia relaţiei: *şirul* $x_0, ..., x_n$ *satisface formula* φ presupune însă că ne raportăm la un model *M*, în domeniul căruia apar obiectele $x_0, ..., x_n$. Vom proceda în felul următor: mai întâi, vom defini valoarea unui termen *t* în *M* pentru şirul $x_0, ..., x_n$; apoi, relaţia: şirul $x_0, ..., x_n$ satisface în *M* formula atomică φ; în sfârşit, vom extinde prin inducţie definiţia relaţiei de satisfacere la orice formulă a limbajului *L*.

(11.1) Definiţia prin inducţie a *valorii* $t((x_0, ..., x_n))$ în *M* a termenului $t(v_0, ..., v_n)$ pentru şirul de obiecte $x_0, ..., x_n$:

a) dacă *t* este v_i, atunci $t((x_0, ..., x_n))$ este obiectul x_i (al $i + 1$-lea obiect din şirul $x_0, ..., x_n$);

b) dacă t este o constantă c, atunci $t((x_0, ..., x_n))$ este interpretarea $I(c)$ a constantei c în modelul M (evident, $I(c)$ nu depinde de şirul $x_0, ..., x_n$);

c) dacă t este $F(t_1, ... t_m)$, unde F este un simbol funcţional m-ar, atunci $t((x_0, ..., x_n))$ este $G(t_1((x_0, ..., x_n)), ... t_m((x_0, ..., x_n)))$ unde G este interpretarea $I(F)$ a lui F în modelul M.

(11.2) Definiţia relaţiei: $x_0, ..., x_m$ satisface formula atomică φ în M, în simboluri $M \models \varphi((x_0, ..., x_n))$:

a) dacă φ este o formulă $t_1 = t_2$, unde $t_1(v_0, ... v_n)$ şi $t_2(v_0, ... v_n)$ sunt termeni, atunci

$M \models t_1 = t_2((x_0, ..., x_n))$ ddacă $t_1((x_0, ..., x_n)) = t_2((x_0, ..., x_n))$;

b) dacă φ este o formulă $P(t_1, ... t_m)$, unde P este un simbol predicativ m-ar, iar $t_1(v_0, ... v_n), ... t_m(v_0, ... v_n)$ sunt termeni, atunci

$M \models P(t_1, ... t_m)((x_0, ..., x_n))$ ddacă $R(t_1((x_0, ..., x_n)), ... t_m((x_0, ..., x_n)))$ unde R este interpretarea $I(P)$ a lui P în modelul M.

(11.3) Definiţia inductivă a relaţiei $M \models \varphi((x_0, ..., x_n))$ pentru orice formulă φ a lui L:

a) dacă φ este o formulă – ψ, atunci

$M \models \varphi((x_0, ..., x_n))$ ddacă nu e adevărată că $M \models \psi((x_0, ... x_n))$

b) dacă φ este o formulă $\psi \wedge \chi$, atunci

$M \models \varphi((x_0, ..., x_n))$ ddacă $M \models \psi((x_0, ..., x_n))$ şi $M \models \chi((x_0, ..., x_n))$

c) dacă φ este o formulă $(\forall v_i)\psi$, cu $0 \leq i \leq n$, atunci $M \models \varphi((x_0, ..., x_n))$ ddacă orice şir obţinut din $x_0, ..., x_n$ înlocuind pe x_i cu un obiect oarecare din domeniul A al lui M satisface pe ψ în M, în simboluri

$M \models \varphi((x_0, ..., x_n))$ ddacă pentru orice $x \in A$, $M \models \psi((x_0, ... x_{i-1}, x, x_{i+1}, ... x_n))$

Ca exerciţiu, definiţia (11.3) se poate completa pentru cazurile când φ este $\psi \vee \chi$, $\psi \rightarrow \chi$, $\psi \leftrightarrow \chi$ sau $(\exists v_i)\psi$. Ţinând seamă de faptul că $(\exists v_i)\psi$ este o prescurtare pentru – $(\forall v_i)$ – ψ avem, de pildă: $M \models (\exists v_i)\ \psi((x_0, ..., x_n))$ ddacă există un obiect $x \in A$ astfel încât $M \models \psi((x_0, ... x_{i-1}, x, x_{i+1}, ... x_n))$

Ideea intuitivă aflată la baza definiţiei (11.1) este următoarea: *termenii* limbajului L sunt acele şiruri de simboluri (din L sau logice) care stau pentru obiecte. Un termen t este înţeles ca nume pentru un obiect; într-un model M un termen t numeşte un obiect x din domeniul A al lui M. Problema e să se determine *care* este acel obiect numit de t în M. Dacă t este o constantă individuală, atunci, conform cu cele arătate în paragraful 9 mai devreme, t este nume pentru acel obiect din A care corespunde lui t prin funcţia de interpretare (funcţie care ne este deja dată în acest moment). Deci, dacă $I(t) = x$, atunci, t e nume pentru x în M. Dacă t este de forma $F(t_1, ... t_m)$, iar pentru fiecare t_i ($i \leq m$) am determinat, cu ajutorul funcţiei de interpretare I care este obiectul numit de t_i în M, atunci, cum funcţia de interpretare ne dă $I(F) = G$, cu G o funcţie $A^m \rightarrow A$, şi cum cunoaştem obiectele x_i numite de

argumentele t_i ale lui F, vom şti şi valoarea lui G pentru argumentele respective, deci pe $G(x_1, ..., x_m)$, care e un obiect x numit în M de $F(t_1, ..., t_m)$. Vom spune că obiectul numit de un termen t în M este valoarea lui t în M.

Lucrurile se complică însă când luăm în considerare *variabilele* individuale. Potrivit definiţiei (10.1), orice variabilă este un termen şi pot fi construiţi termeni cu ajutorul variabilelor. Atunci trebuie să dăm sens ideii că şi variabilele sunt nume pentru obiecte. Dar, desigur, o variabilă nu e nume pentru un obiect constant; ea este nume pentru un obiect, însă îl numeşte nu univoc, ci într-un chip ambiguu. În formula „v este număr real", variabila v este un nume pentru un număr real, dar nu pentru unul anume: v numeşte ambiguu acel număr real.

Problema e deci aceea de a trata, relativ la modelul M, şi variabilele ca nume pentru obiectele din A. Avem două posibilităţi:

a) Fiecărei variabile v_i îi ataşăm ca valoare un obiect din A; de pildă, luăm toate obiectele din A, le punem într-o ordine şi stipulăm; valoarea lui v_i este al i–1-lea obiect din şirul format. În acest caz variabilele sunt tratate exact ca şi constantele individuale; v_i nu mai numeşte ambiguu un obiect, ci în M această variabilă numeşte un obiect precis determinat. Pentru a păstra această intuiţie, putem proceda astfel: se construieşte un model M' care e întru totul la fel cu M, cu excepţia faptului că în M' valoarea lui v_i nu mai este al i–1-lea element din şirul nostru, ci, să zicem, al i+1-lea. Desigur că procedând astfel se obţine un număr infinit (când A este infinit) de modelele de tipul lui M'. A spune că c e o constantă iar v_i o variabilă, care deci e un nume ambiguu, revine la a spune că în toate aceste modele c numeşte unul şi acelaşi obiect, dar v_i numeşte obiecte diferite în modele diferite.

Dificultatea cu această strategie apare atunci când trebuie să determinăm când e satisfăcută în M o expresie precum $(\forall v_i)\psi$. Definiţia (11.3), punctul (c), ar trebui refăcută după cum urmează:

M $\models (\forall v_i)\psi$ ddacă pentru orice model M' care diferă de M doar prin valoarea acordată termenului v_i, $M' \models \psi$.

În principiu, această definiţie nu prezintă neajunsuri formale faţă de cea cuprinsă în (11.3); dar, potrivit ei pentru a determina dacă o formulă φ e satisfăcută într-un model anume suntem obligaţi să cercetăm nu numai acel model, ci şi o infinitate de alte model. Se poate imagina o strategie care permite să se construiască relaţia de satisfacere fără a ieşi din cadrul unui *singur* model? O atare strategie, urmată în definiţia (11.1) este aceasta:

b) Unei variabile v_i nu i se poate ataşa în chip absolut un obiect din domeniul A al lui M, ci i se poate ataşa un obiect *relativ la fiecare şir* $x_0, ... x_n$ de obiecte din A. Pentru un alt şir $y_0, ... y_n$ de obiecte din A, valoarea lui v_i poate fi diferită (de pildă, când $x_i \neq y_i$). Deci apelul la o infinitate de alte modele M' e înlocuit cu apelul *în* M la o infinitate de şiruri de obiecte din A.

Strategia a doua pare să fie mai naturală, căci astfel într-un model M variabilei v_i i se atribuie ca valoare un obiect x_i, deci este nume al acelui obiect, dar v_i în continuare îl denotă în chip ambiguu, fiindcă v_i îl numeşte pe x_i nu în mod absolut, ci relativ la un anumit şir $x_0, \ldots x_n$ de obiecte; iar relativ la un alt şir, v_i va numi alt obiect.

Să reţinem şi un alt aspect: variabilele sunt *nume*, adică în orice model ele trebuie tratate ca numind un obiect. Variabilele sunt nume *veritabile*.

Fie acum o formulă φ care nu are decât o variabilă liberă v; scriem $\varphi(v)$ pentru a evidenţia acest fapt. În cazul acesta, putem considera ca şiruri de obiecte şiruri doar cu un obiect, de forma $((x))$ sau $((y))$. Dacă $\varphi(v)$ este o propoziţie atomară, atunci, potrivit lui (11.2), avem $M \models \varphi(v)\ ((x))$ când:

1) v e interpretată ca fiind un nume pentru obiectul x; şi

2) φ este un simbol predicativ unar P şi x satisface predicatul P, adică a) interpretarea lui P în M este o mulţime de obiecte $M(P)$; b) obiectul x aparţine acestei mulţimi $M(P)$.

Fie acum relaţia $M \models (\forall v)\ \varphi(v)\ ((x))$. Potrivit lui (11.3), punctul (c), relaţia are loc atunci când orice obiect x din A satisface predicatul φ.

În logica propoziţiilor s-a arătat (a se vedea propoziţiile (2.12) şi (3.4)) că valoarea de adevăr a unei propoziţii φ a limbajului $L(S)$ depinde numai de literele propoziţionale (= elemente ale mulţimii S) care apar în φ. În logica predicatelor se poate demonstra un rezultat de un tip analog. Fie $\varphi(v_0, \ldots v_n)$ o formulă ale cărei variabile, libere sau legate, se găsesc printre $v_0, \ldots v_n$. Să presupunem că în φ apar m variabile libere ($m \leq n$) şi să presupunem că aceste variabile libere sunt primele m-l în şirul $v_0, \ldots v_n$. Putem scrie atunci pe φ ca $\varphi(v_0, \ldots v_{m-1}, \ldots v_n)$. Ceea ce vrem să demonstrăm este că într-un model M, pentru un şir $x_0, \ldots x_n$ de obiecte, faptul că avem $M \models \varphi((x_0, \ldots x_n))$ nu depinde de toate obiectele din şir, ci numai de primele m. Aşadar, pentru a determina dacă $\varphi(v_0, \ldots v_{m-1}, \ldots v_n)$ e satisfăcută într-un model M, nu e nevoie să luăm în considerare şiruri mai lungi de m obiecte. Căci se va arăta că un şir $x_0, \ldots x_{m-1}, \ldots x_p$ de obiecte din A satisface sau nu formula φ indiferent care sunt obiectele $x_m, \ldots x_p$.

Mai întâi, vom arăta că pentru orice model M:

(11.4) Dacă $t(v_0, \ldots v_n)$ este un termen, iar $x_0, \ldots x_p$ şi $y_0, \ldots y_q$ sunt două şiruri de cel puţin n obiecte din A (deci $n \leq p$, $n \leq q$), atunci, dacă $x_i = y_i$ ori de câte ori v_i este o variabilă a lui t, e adevărat că $t((x_0, \ldots x_p)) = t((y_0, \ldots y_p))$.

Demonstraţia se face prin inducţie:

a) Dacă $t(v_0, \ldots v_n)$ este o variabilă v_i, atunci avem, conform definiţiei (11.1), $t((x_0, \ldots x_p)) = x_i$ şi $t((y_0, \ldots y_q)) = y_i$.

Dar prin premisă ştim că $x_i = y_i$ şi deci $t((x_0, \ldots x_p)) = t((y_0, \ldots y_p))$.

b) Dacă $t(v_0, \ldots v_n)$ este o constantă c, iar $I(c) = x$, atunci evident $t((x_0, \ldots x_p)) = x = t((y_0, \ldots y_q))$.

c) Dacă $t(v_0, \ldots v_n)$ este $F(t_0, \ldots t_m)$, unde F este un simbol funcţional m-ar, atunci, potrivit pasului inductiv, (11.4) are loc pentru fiecare dintre termenii t_i $(1 \leq i \leq m)$. Fie G interpretarea lui F în M. Atunci avem

$$G(t_1((x_0, \ldots x_p)), \ldots t_m((x_0, \ldots x_p))) = G(t_1((y_0, \ldots y_q)), \ldots t_m((y_0, \ldots y_q))).$$

Pe de altă parte, prin (11.1) se obţine

$$G(t_1((x_0, \ldots x_p)), \ldots t_m((x_0, \ldots x_p))) = t((x_0, \ldots x_p)) \text{ şi}$$
$$G(t_1((y_0, \ldots y_q)), \ldots t_m((y_0, \ldots y_q))) = t((y_0, \ldots y_q)).$$

Ţinând cont de prima identitate, avem imediat

$$t((x_0, \ldots x_p)) = t((y_0, \ldots y_q)), \text{ q.e.d.}$$

Urmează să demonstrăm acum teorema pentru formulele atomare:

(11.5) Pentru orice model M, dacă φ este o formulă atomară ale cărei variabile se găsesc printre $v_0, \ldots v_n$, iar $x_0, \ldots x_p$ şi $y_0, \ldots y_q$ sunt două şiruri de cel puţin n obiecte din A, atunci dacă $x_i = y_i$ ori de câte ori v_i este o variabilă a lui t, $(i \leq m)$, avem:

$$M \models \varphi((x_0, \ldots x_p)) \text{ ddacă } M \models \varphi((y_0, \ldots y_q)).$$

Demonstraţie. φ poate fi, mai întîi, de form $t_1 = t_2$, unde $t_1(v_0, \ldots v_n)$ şi $t_2(v_0, \ldots v_n)$ sunt termeni. Atunci, folosind pe (11. 4), avem

$$t_1((x_0, \ldots x_p)) = t_1((y_0, \ldots y_q))$$
$$t_2((x_0, \ldots x_p)) = t_2((y_0, \ldots y_q))$$

Dacă avem $M \models \varphi((x_0, \ldots x_1))$, înseamnă că avem

$$t_1((x_0, \ldots x_p)) = t_2((x_0, \ldots x_p))$$

şi, cu cele.două identităţi de mai sus, rezultă imediat că

$$t_1((y_0, \ldots y_q)) = t_2((y_0, \ldots y_q))$$

adică $M \models \varphi((y_0, \ldots y_q))$, q.e.d.

În al doilea rând, φ poate fi o formulă atomară de forma

$P(t_1, \ldots t_m)$, unde P este un predicat m-ar, iar $t_i(v_0, \ldots v_n)$ $(1 \leq i \leq m)$ sunt termeni. Să presupunem că avem $M \models \varphi((x_0, \ldots x_p))$. Dacă R e interpretarea lui P în M, obţinem

$$R(t_1((x_0, \ldots x_p)), \ldots t_m((x_0, \ldots x_p)))$$

Folosind teorema (11.4), avem pentru orice t_i $(1 \leq i \leq m)$

$$t_i((x_0, \ldots x_p)) = t_i((y_0, \ldots y_q))$$

şi deci

$$R(t_1((y_0, \ldots y_q)), \ldots t_m((y_0, \ldots y_q))),$$

adică $M \models \varphi((y_0, \ldots y_q))$.

În ambele cazuri, cea de-a doua parte a demonstraţiei, care exprimă „necesitatea", se demonstrează prin aceleaşi procedee.

Teorema care urmează exprimă rezultatul menţionat în comentariile informale de mai sus. Ea generalizează pe (11.5) pentru orice formulă φ a lui L.

(11.6) Pentru orice model M, dacă φ este o formulă ale cărei variabile libere sau legate sunt printre $v_0, \ldots v_n$, iar $x_0, \ldots x_p$ şi $y_0, \ldots y_q$ sunt două şiruri de cel puţin n obiecte din domeniul A al lui M, atunci, dacă $x_i = y_i$ ori de câte ori v_i este o variabilă liberă a lui φ ($i \leq n$), e adevărat că

$M \models \varphi((x_0, \ldots x_p))$ ddacă $M \models \varphi((y_0, \ldots y_q))$.

Demonstraţia se face prin inducţie, pentru cazurile când φ este o formulă 1) $-\psi$; 2) $\psi \wedge \chi$; 3) $(\forall v_i)\, \psi$. Vom demonstra aici numai ultimul caz. Celelalte două sunt lăsate ca exerciţii.

Fie deci $\varphi = (\forall v_i)\, \psi$, unde $0 \leq i \leq n$. Următoarele expresii sunt echivalente:

(i) $M \models \varphi((x_0, \ldots x_p))$

(ii) pentru orice $x \in A$, $M \models \psi((x_0, \ldots x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots x_p))$

(iii) pentru orice $y \in A$, $M \models \psi((y_0, \ldots y_{i-1}, y, y_{i+1}, \ldots y_q))$

(iv) $M \models \varphi((y_0, \ldots y_q))$

A doua şi a treia expresie sunt echivalente prin pasul inductiv – căci s-a presupus că (11.6) are loc pentru ψ.

O consecinţă imediată a teoremei (11.6) se obţine astfel: să presupunem că $q > p$ şi că, pentru orice i mai mic sau egal cu p, avem $x_i = y_i$. Atunci obţinem:

(11.7) $M \models \varphi((y_0, \ldots y_p))$ ddacă $M \models \varphi((y_0, \ldots y_p, y_{p+1}, \ldots y_q))$. Teorema (11.7) exprimă cu limpezime faptul că dacă variabilele libere din φ sunt între $v_0, \ldots v_p$, atunci satisfacerea lui φ în M depinde numai de segmentele iniţiale de $p + 1$ obiecte $y_0, \ldots y_p$ ale şirurilor $y_0, \ldots y_q$ de obiecte din A.

Fie acum σ o propoziţie a lui L. În σ nu apar variabile libere. Să presupunem că toate variabilele legate ale propoziţiei σ se găsesc printre $v_0, \ldots v_n$. Folosind aici teorema (11.7), conchidem că $M \models \sigma((x_0, \ldots x_n))$ nu depinde de fapt decât de segmentul iniţial cu zero elemente al şirului $x_0, \ldots x_n$, adică de segmentul iniţial vid al acestui şir. Aceasta, pentru simplul motiv că σ nu are nici o variabilă liberă. Dacă e însă aşa, înseamnă că relaţia $M \models \sigma((x_0, \ldots x_n))$ nu e de fapt afectată de elementele concrete care apar în şirul $x_0, \ldots x_n$. Aşadar,

(11.8) Dacă σ este o propoziţie, atunci oricare ar fi şirurile $x_0, \ldots x_p$ şi $y_0, \ldots y_q$ de obiecte din A (aceste şiruri pot fi şi vide), avem:

$M \models \sigma((x_0, \ldots x_p))$ ddacă $M \models \sigma((y_0, \ldots y_q))$.

Să presupunem că există un şir $x_0, \ldots x_p$ care satisface în M propoziţia σ. Atunci, potrivit lui (11.8), orice alt şir $y_0, \ldots y_q$ satisface în M pe σ. De aici decurge imediat că:

(11.8.1) Există un şir $x_0, \ldots x_p$ astfel încât $M \models \sigma((x_0, \ldots x_p))$ ddacă oricare ar fi şirul $x_0, \ldots x_q$, $M \models \sigma((x_0, \ldots y_q))$.

Teoremele (11.8) şi (11.8.1) arată că, atunci când avem în vedere propoziţiile limbajului L, noţiunea de satisfacere nu mai depinde de şirurile de obiecte din domeniul modelului. De aceea, în cele ce urmează de multe ori nici nu vom mai menţiona explicit şirul de obiecte şi vom scrie simplu $M \models \sigma$ în loc de $M \models \sigma((x_0, \ldots x_p))$.

*

Noţiunile introduse în acest paragraf şi în cel anterior ne permit să definim cu mai multă precizie raportul dintre un *predicat*, aşadar o formulă $\varphi(v_1, \ldots v_n)$, şi *proprietatea* sau *relaţia* pe care aceasta o exprimă. Să notăm cu *Mod(L)* colecţia tuturor modelelor limbajului L. Pentru înţelegerea mai bună a noţiunilor ce vor fi definite, ne vom limita la proprietăţile unare – deci la proprietăţile propriu-zise – adică la proprietăţile exprimate de formulele $\varphi(v)$ cu o singură variabilă liberă. Potrivit lui (11.7), şirurile de obiecte de care depinde relaţia $M \models \varphi$ sunt formate dintr-un singur obiect; le vom nota de aceea cu $((x))$, $((y))$ etc.

(11.9) Se numeşte *extensiune* a lui φ în modelul M, în simboluri $Ext_M(\varphi)$, mulţimea acelor obiecte din domeniul A al lui M care satisfac formula φ, în simboluri

$$Ext_M(\varphi) = \{ x \in A : M \models \varphi((x))\}$$

(11.10) Se numeşte *intensiune* a lui φ, în simboluri Int_φ, acea funcţie definită pe mulţimea *Mod(L)* şi care ataşează fiecărui model M extensiunea lui φ la M, în simboluri

$$Int_\varphi (M) = Ext_M(\varphi).$$

Vom spune că Int_φ este *proprietatea desemnată* de φ. Să luăm ca exemplu predicatul „preşedinte al S.U.A.". Unul dintre modelele limbajului în care apare acest predicat este lumea reală. Să notăm acest model cu K. Extensiunea predicatului „preşedinte al S.U.A." în acest model cuprinde toate acele persoane care au îndeplinit realmente funcţia de preşedinte al S.U.A. Fie, de pildă, persoana Bill Clinton. Această persoană este cuprinsă în mulţinea Ext_K (preşedinte al S.U.A.) ddacă relaţia următoare are loc:

$K \models$ preşedinte al S.U.A. ((Bill Clinton.))

Analog, se verifică faptul că, întrucât

$K \models$ preşedinte al S.U.A. ((G. Washington))

persoana G. Washington e cuprinsă în extensiunea la K a predicatului „preşedinte al S.U.A.". Însă, dacă lumea ar fi fost altfel, s-ar fi putut întâmpla ca Bill Clinton să nu ajungă niciodată preşedinte. Adică, într-un alt model M, diferit de K, relaţia

M |= preşedinte al S.U.A. ((Bill Clinton))

nu are loc. De aici decurge că

Ext_K (preşedinte al S.U.A.) ≠ Ext_M (preşedinte al S.U.A)

Mulţi filosofi au obiectat împotriva acceptării proprietăţilor ca entităţi în ontologie pentru motivul că este foarte dificil să se precizeze condiţiile în care aceste entităţi sunt identice sau diferite. Procedura indicată de definiţia (11.10) este convenabilă şi pentru că reuşeşte să ofere un răspuns provocării ridicate de obiecţia menţionată.

(11.11) Fie Φ şi Ψ proprietăţile desemnate de predicatele φ şi ψ. Atunci:

a) Φ şi Ψ sunt identice ddacă $Int_\varphi = Int_\psi$, adică dacă oricare ar fi modelul M din $Mod(L)$, $Ext_M(\varphi) = Ext_M(\psi)$.

b) Φ şi Ψ sunt diferite ddacă $Int_\varphi \neq Int_\psi$ adică dacă există un model M din $Mod(L)$ astfel încât $Ext_M(\varphi) \neq Ext_M(\psi)$

(Notă asupra terminologiei folosite: un predicat φ *denotă* într-un model extensiunea lui în acel model şi *desemnează* intensiunea; intensiunea, să accentuăm, nu e relativă la un sau alt model.)

Să luăm, de exemplu, predicatele „om" şi „fiinţă raţională". Lor le ataşăm proprietăţile a fi om şi a fi fiinţă raţională. Sunt aceste proprietăţi diferite sau nu? În lumea noastră K se pare că cele două predicate au aceeaşi extensiune, deci

Ext_K(om) = Ext_K(fiinţă raţională)

Dar pare-se că nu există argumente constrângătoare – dimpotrivă! – pentru a admite că, dacă lumea ar fi fost întrucâtva diferită, ar fi existat fiinţe raţionale altele decât oamenii. Fie M acea altă lume (mulţi consideră că M este chiar lumea noastră; pentru a dovedi că cele două proprietăţi sunt distincte, chestiunea aceasta nu este relevantă). Aşadar, există un model sau lume M în care

Ext_M(om) ≠ Ext_M(fiinţă raţională),

de unde decurge că $Int_{om} \neq Int_{fiinţă\ raţională}$, adică, prin (11.11), cele două proprietăţi nu sunt identice.

Definiţiile (11.9) şi (11.10) pot fi uşor modificate pentru cazul în care vrem să cercetăm termenii lui L.

4(11.12) Se numeşte extensiunea sau denotaţia termenului $t(v_0, ...v_n)$ în M, în simboluri $Ext_M(t(v_0, ...v_n))$ mulţimea acelor obiecte x din A astfel încât există un şi $x_0, ...x_n$ de obiecte din A pentru care $t((x_0, ...x_n)) = x$.

Un caz special îl constituie *termenii singulari în M*, deci termenii care în M au ca denotaţie o mulţime cu un singur element, altfel zis au un singur denotat. Constantele individuale ale lui L sunt termeni singulari în orice model M (aceasta se observă cu ajutorul definiţiei (11.1)). Dar şi termeni mai complecşi, în care apar variabile, pot fi singulari. Fie, de exemplu, termenii aritmetici

$t_1(v) = v + 1$ şi $t_2(v) = v$. Dacă F este un simbol funcţional binar definit prin $F(v) = t_1(v)$-$t_2(v)$, atunci e limpede că întotdeauna $F(v) \geq 1$ şi deci în orice model M, $Ext_F(M) = 1$. Alţi termeni, precum „autorul *Iliadei*", pot să aibă în lumi diferite ca denotaţie a) un singur obiect; b) mai multe obiecte; c) nici un obiect.

(11.13) Intensiunea sau *conceptul individual* desemnat(ă) de termenul t, în simboluri Int_t, este acea funcţie definită pe $Mod(L)$ care ataşează fiecărui model M denotaţia lui t la acel model.

Spunem că termenii „autorul *Eticii Nicomahice*" şi „profesorul lui Alexandru Macedon" desemnează concepte diferite ddacă există două modele diferite (lumi diferite) în care cei doi termeni au denotaţii diferite. În cazul lumii reale K avem

Ext_K (autorul *Eticii Nicomahice*) = Ext_K (profesorul lui Alexandru Macedon).

Dar e posibil ca Alexandru Macedon să fi avut, într-o altă lume posibilă, alt profesor. În acea lume M am fi avut

Ext_M (autorul *Eticii Nicomahice*) ≠ Ext_M (profesorul lui Alexandru Macedon).

Reobţinem astfel rezultatul intuitiv acceptat că cele două descripţii nu „înseamnă" acelaşi lucru. (Atenţie: dacă în limbajul folosit „Alexandru Macedon' şi „*Etica Nicomahică*" sunt constante individuale, atunci în orice model considerat trebuie ca acestea să aibă o denotaţie nevidă: deci nu vom putea considera o lume posibilă în care, de exemplu, Alexandru Macedon nu există).

Exemplu. Fie L un limbaj care cuprinde 1) o constantă individuală c; un simbol predicativ P binar; c) o funcţie unară f. Aşadar,

$L = \{c, P, f\}$. Construim apoi formulele lui L. Sunt termeni, de exemplu, expresiile $f(v)$; $f(c)$; $f(f(c))$. Formule sunt, de exemplu, $(\forall v_1)\ (\exists v_2)\ P\ (v_1, v_2)$; $(\forall v_1)\ (\forall v_2)\ ((P\ (v_1, v_2) \wedge P\ (v_2, c)) \rightarrow P\ (v_1, c))$; $P(c, f(f(c)))$. Un model M al limbajului L este, de pildă, următoarea structură: $M = \langle A, R, G, a\rangle$, unde A este o mulţime formată din trei persoane, Ion, Andrei şi Mihaela; R este o relaţie între aceste trei persoane, de pildă relaţia: are un câştig lunar cel puţin la fel de mare ca; R este, evident, o relaţie de ordine nestrictă. Să formăm următorul tabel:

al doilea argument primul argument	Ion	Andrei	Mihaela
Ion	1	1	1
Andrei	0	1	0
Mihaela	0	1	1

Numerele 0 şi 1 arată dacă relaţia R are loc între cele două persoane sau nu are loc.

Apoi, G este o funcţie unară, de pildă funcţia *tată*. Să presupunem că Ion e tatăl Mihaelei, iar Andrei e tatăl lui Ion, deci

f(Mihaela) = Ion; f(Ion) = Andrei.

În sfârşit, a este o persoană din A, fie Mihaela aceasta.

În această interpretare, prima formulă (propoziţie) a lui L e adevărată, fiindcă relaţia R este reflexivă şi deci oricare ar fi persoana x, avem $R(x, x)$. Propoziţia a doua e, de asemenea, adevărată, aşa cum se poate vedea uşor. Înţelesul celei de-a treia este că Mihaela are un câştig lunar cel puţin la fel de mare ca al bunicului ei, Andrei, ceea ce iarăşi se întâmplă, potrivit tabelului nostru.

§ 12. Teorii de ordinul întâi

În paragraful 7 am introdus noţiunea de teorie în $L(S)$ şi am menţionat câteva rezultate. Simplitatea teoriei modelelor pentru logica propoziţională nu a permis însă obţinerea unor teoreme „tari", interesante. Pentru teoriile de ordinul întâi, aşa cum vom vedea, pot fi demonstrate rezultate metateoretice cu totul remarcabile. În acest paragraf va fi introdusă noţiunea formală de *teorie de ordinul întâi* şi se vor da două exemple de atari teorii.

(12.1) O teorie de ordinul întâi este o mulţime de propoziţii ale unui limbaj L de ordinul întâi.

Şi în cazul acestor teorii pot fi introduse diverse caracterizări. Din paragraful 7 pot fi preluate fără dificultăţi esenţiale noţiuni precum cele de:

a) teorie consistentă;
b) teorie închisă;
c) teorie completă;
d) mulţime de axiome pentru o teorie;
e) teorie finit axiomatizabilă etc.

Alte noţiuni folositoare sunt următoarele:

(12.2) T' este o subteorie a lui T ddacă $T' \subseteq T$. Dacă T' este o subteorie a lui T, atunci T este o extindere a lui T'.

(12.3) Fie M un model al lui L. Se numeşte teoria lui M, în simboluri $Th(M)$, mulţimea propoziţiilor lui L adevărate în M. Evident, $Th(M)$ este o teorie completă.

Exemplele de teorii ce vor fi date în acest paragraf sunt *teoria ordinii* şi *aritmetica lui Peano*.

a) *Teoria ordinii*

Această teorie este formulată într-un limbaj $L = \{\leq\}$. L cuprinde deci un singur simbol predicativ – predicatul binar $\leq$ – şi nici o constantă individuală

ori simbol funcţional. Intuitiv, „≤" se citeşte: ...este mai mic decât... Formulele lui L se construiesc potrivit definiţiei (10.2). Pentru comoditate, vom scrie $v \leq v'$ în loc de $\leq (v, v')$. Următoarea definiţie va fi des utilizată:

(12.4) $v_0 < v_1$ ddacă $v_0 \leq v_1$ şi $v_0 \neq v_1$.

Intuitiv, $v_0 < v_1$ se citeşte: v_0 este strict mai mic decât v_1. Vom spune de aceea că ≤ este o relaţie de ordine nestrictă, iar < o relaţie de ordine strictă.

(12.5) Teoria T a ordinii parţiale este mulţimea consecinţelor în L ale următoarelor axiome:

a) $(\forall v_0)\ (\forall v_1)\ (\forall v_2)\ (v_0 \leq v_1 \wedge v_1 \leq v_2 \rightarrow v_0 \leq v_2)$
b) $(\forall v_0)\ (\forall v_1)\ (v_0 \leq v_1 \wedge v_1 \leq v_0 \rightarrow v_0 = v_1)$
c) $(\forall v_0)\ (v_0 \leq v_0)$

Punctul (a) exprimă faptul că relaţia ≤ este *tranzitivă*; (b) – că această relaţie este *antisimetrică*, iar (c) – că este *reflexivă*.

Un model pentru T este o pereche $M = <A, R>$, unde A este o mulţime nevidă, iar R – o relaţie tranzitivă, antisimetrică şi reflexivă între elementele lui A. Astfel, <mulţimea oraşelor din judeţul Hunedoara, ...are cel puţin la fel de mulţi locuitori ca...> sau <mulţimea cărţilor din biblioteca Facultăţii de Filosofie, ...a fost citită de studentul B înaintea cărţii...> sunt modele pentru T. În ambele, relaţiile prin care se interpretează ≤ satisfac cele trei propoziţii cuprinse în (12.5). Însă, în timp ce în primul model oricare ar fi două obiecte din A – deci oricare ar fi două oraşe din judeţul Hunedoara – are loc fie relaţia că primul are cel puţin la fel de mulţi locuitori ca al doilea, fie că al doilea are cel puţin la fel de mulţi locuitori ca primul, în al doilea model nu e obligatoriu ca oricare două cărţi să fie legate prin relaţia de ordine.

Cele două exemple sugerează că, uneori, relaţia de ordine (≤ sau <) are şi alte proprietăţi în afară de cele cuprinse în (12.5). Pentru relaţia de ordine strictă, următoarele proprietăţi sunt printre cele mai întâlnite:

(12.6.1) $(\forall v_0)\ (\forall v_1)\ (v_0 < v_1 \vee v_0 = v_1 \vee v_1 < v_0)$ (comparabilitate)

(12.6.2) $(\forall v_0)\ (\forall v_1)\ (\forall v_2)\ (v_0 < v_1 \wedge v_0 < v_2) \rightarrow (\exists v_3)\ (v_1 < v_3 \wedge v_2 < v_3))$ (direcţionare)

(12.6.3.) $(\forall v_0)\ (\forall v_1)\ (v_0 < v_1 \rightarrow (\exists v_2)\ (v_0 < v_2 \wedge v_2 < v_1))$ (densitate)

(12.6.4) $(\forall v_0)\ (\exists v_1)\ (v_0 < v_1)$ (inexistenţa elementelor maximale)

(12.6.5) $(\forall v_0)\ (\exists v_1)\ (v_1 < v_0)$ (inexistenţa elementelor minimale)

Să notăm cu T_1 teoria care are ca axiome axiomele lui T plus (12.6.1) – (12.6.3) şi cu T_2 teoria care are ca axiome axiomele lui T_1 plus axiomele (12.6.4) (12.6.5). Vom spune că T_1 este o teorie a *ordinii dense*, iar T_2 – o teorie a *ordinii dense fără extremi*. Este evident că T, T_1, T_2 sunt teorii finit

axiomatizabile; în plus, T este o subteorie a lui T_1, iar T_1 este o subteorie a lui T_2. Mai puţin triviale sunt următoarele propoziţii:

(12.7.1) Orice model al lui T_1 are sau un element, sau o infinitate de elemente (e deci infinit).

(12.7.2) Dacă M_1 şi M_2 sunt modele infinit numărabile ale lui T_2, atunci ele sunt izomorfe.

Fie, de pildă, $M = < Q, < >$, unde Q este mulţimea numerelor raţionale, iar $<$ relaţia obişnuită definită pe Q ... este strict mai mic..., un model al lui T. Dar M este un model şi pentru T_2. Într-adevăr, (12.6.1) şi (12.6.2) se verifică imediat; (12.6.3) spune că între oricare două numere raţionale x şi y există un al treilea z. Că e aşa, se vede imediat luând pe z ca $\frac{x+y}{2}$; (12.6.4) spune că nu există un cel mai mare număr raţional; într-adevăr, dacă z ar fi astfel, atunci, cum $z + 1$ e tot un număr raţional, avem $z < z + 1$, obţinându-se o contradicţie; şi analog pentru (12.6.5).

Toate proprietăţile formulate aici sunt exprimate într-un limbaj de ordinul întâi, în $L = \{\leq\}$. Relaţia de ordine are însă şi proprietăţi care nu pot fi exprimate în acest limbaj. Vom spune că proprietăţi precum cele menţionate deja, care pot fi exprimate în limbajul L de ordinul întâi, sunt *proprietăţi de ordinul întâi*. O proprietate care nu e astfel e dată de propoziţia următoare:

(12.8) Relaţia $<$ definită pe A este *binefundată* ddacă orice mulţime de obiecte din A are un element minimal.

Aşadar, $<$ este binefundată în cazul următor: fie U o mulţime oarecare de obiecte din A. Atunci, în U există un cel mai mic obiect. De pildă, fie U o mulţime oarecare de numere naturale. Se observă cu uşurinţă că în U există un cel mai mic număr natural, aşadar relaţia $<$, definită pe numerele naturale, deci în modelul $< N, < >$, este binefundată. Dar fie acum modelul $< Q, < >$. Să luăm drept U mulţimea numerelor raţionale strict mai mari decât 1. Mulţimea U nu are un cel mai mic element. Căci, dacă ea ar cuprinde un cel mai mic număr x, atunci va trebui să cuprindă şi numărul $\frac{1+x}{2}$, care este mai mic decât x, dar fiind mai mare decât 1, va aparţine de asemenea lui U. Prin urmare, $<$ nu este binefundată pe mulţimea Q.

Dar faptul că $<$ nu este binefundată nu poate fi exprimat într-un limbaj de ordinul întâi. Într-adevăr. o formalizare a lui (12.8) ar putea fi

(12.8.1) $(\forall U)((\exists v_0) U(v_0) \rightarrow (\exists v_0)(U(v_0) \rightarrow (\forall v_1)(v_1 < v_0 \rightarrow \neg U(v_1))))$

Însă în (12.8.1) apare cuantificatorul $(\forall U)$, în cuvinte: oricare ar fi mulţimea U de obiecte (din A); acesta nu este cuantificatorul introdus în paragraful 10 mai sus, fiindcă el nu se aplică unei variabile individuale – ale cărei valori

sunt, deci, obiecte – ci unei variabile care ia ca valori mulţimi de obiecte. În concluzie, binefundarea nu e o proprietate de ordinul întâi a relaţiei de ordine strictă.

Se poate observa că nici o relaţie de ordine nestrictă $\leq$ nu este binefundată. Căci, dacă într-o mulţime nevidă oarecare U de obiecte x ar fi un obiect minimal, atunci ar exista întotdeauna un obiect y astfel încât $y \leq x$, anume x însuşi.

b) *Aritmetica lui Peano*

În acest paragraf nu vom expune decât elementele de bază ale aritmeticii lui Peano – *AP* pe scurt; vom reveni în cele ce urmează pe larg asupra acestei teorii.

Limbajul L_{AP} al aritmeticii lui Peano nu cuprinde nici un simbol predicativ. Dar cuprinde o constantă individuală 0 (zero) şi trei simboluri funcţionale, unul unar S (funcţia succesor) şi două binare, + (adunare) şi · (înmulţire). Aşadar, $L_{AP} = \{0, S, +, \cdot\}$. Pentru a formaliza pe L_{AP} se adaugă conectivele logice, variabilele individuale, cuantificatorul universal, identitatea şi parantezele. Termenii lui L_{AP} se definesc inductiv (Să ne amintim că termenii sunt expresiile unui limbaj care denotă obiectele din modele, deci – în modelul standard, intenţionat al lui L_{AP} – *numerele naturale*).

(12.9) Definiţia termenilor lui L_{AP}:

a) orice variabilă v_i este un termen.

b) 0 este un termen;

c) dacă t_1 şi t_2 sunt termeni, atunci St_1, $t_1 + t_2$, $t_1 \cdot t_2$ sunt termeni.

Intuitiv, aceasta înseamnă că succesorul unui număr, suma şi produsul a două numere sunt tot numere. De pildă, termenul $S0$ denotă numărul 1, $SS0$ denotă numărul 2 etc. $1 + 2$ şi $1 \cdot 2$ sunt tot termeni şi ei denotă numere (numerele 3, respectiv 2) etc.

(12.10) Definiţia formulelor atomare ale lui L_{AP}: dacă t_1 şi t_2 sunt termeni, atunci $t_1 = t_2$ este o formulă atomară.

De exemplu, $0 = 0$, $v_0 = 1$, $1 = 0$ sunt formule atomare.

(12.11) Definiţia formulelor lui L_{AP}:

a) Orice formulă atomară a lui L_{AP} este formulă.

b) Dacă φ şi ψ sunt formule ale lui L_{AP}, atunci şi $\neg\varphi$ şi $\varphi \wedge \psi$ sunt formule.

c) Dacă φ este o formulă, iar v este o variabilă, atunci $(\forall v)\varphi$ este o formulă.

d) Un şir de simboluri logice sau ale lui L_{AP} este formulă dacă şi numai dacă se poate arăta că este formulă prin aplicarea de un număr finit de ori a clauzelor (a) – (c).

Construcţia lui L_{AP} ca sistem formal necesită introducerea axiomelor logice. Ele se găsesc expuse în paragraful 10 şi pot fi transpuse aici fără nici un

fel de dificultate. În L_{AP} o teorie T este evident o mulţime de propoziţii ale lui L_{AP}, iar o teorie închisă este o mulţime de propoziţii astfel încât

dacă $T \vdash \sigma$, atunci $\sigma \in T$.

Aritmetica lui Peano este o teorie închisă în L_{AP}. O mulţime de axiome pentru L_{AP} este următoarea:

(12.12) a) $(\forall\ v)\ (0 \neq Sv)$

b) $(\forall\ v_0)\ (\forall\ v_1)\ (v_0 \neq v_1 \rightarrow Sv_0 \neq Sv_1)$

c) $(\forall\ v_0)\ (v_0 + 0 = v_0)$

d) $(\forall\ v_0)\ (\forall\ v_1)\ (v_0 + Sv_1 = S(v_0 + v_1))$

e) $(\forall\ v_0)\ (v_0 \cdot 0 = 0)$

f) $(\forall\ v_0)\ (\forall v_1)\ (v_0 \cdot Sv_0 = (v_0 \cdot v_1) + v_0)$

g) Oricare ar fi formula $\varphi(v_0, \ldots v_n)$, dacă v_0 este liberă în φ, atunci expresia următoare este axiomă a lui *AP*:

(SI) $(\forall\ v_1) \ldots (\forall\ v_n)\ (\varphi(0, v_1, \ldots v_n) \wedge (\forall\ v_0)\ (\varphi(v_0, v_1, \ldots v_n) \rightarrow \varphi(Sv_0, v_1, \ldots v_n))) \rightarrow (\forall\ v_0)\ \varphi(v_0, v_1, \ldots v_n))$

Axioma (a) spune că 0 nu este succesorul nici unui număr; b) garantează că funcţia succesor este injectivă: dacă are argumente diferite, atunci are valori diferite. Axiomele (c) şi (d), respectiv (e) şi (f), dau definiţii *recursive* pentru adunare, respectiv pentru înmulţire. Vom spune că o funcţie F este definită recursiv dacă se construieşte mai întâi $F(0)$ şi, în pasul următor, se arată cum se poate construi $F(Sx)$ dacă îl cunoaştem de $F(x)$. Să luăm cazul adunării. Ne interesează să definim adunarea unui număr x cu un altul y. Mai întâi, se construieşte adunarea lui x cu 0. Axioma (c) spune că $x + 0$ este x. Acum presupunem că ştim cum să îl adunăm pe x cu un număr z. Axioma (d) ne spune cum îl putem aduna pe x cu succesorul Sz al lui z: îl adunăm pe x cu z şi apoi construim succesorul numărului obţinut.

Prin punctul (g) este formulată *schema axiomatică a inducţiei* (cf. şi (2.13)). Ceea ce trebuie observat aici e faptul că (SI) *nu* este o axiomă; prin (SI) e dată o *infinitate de axiome*, câte una pentru fiecare formulă φ a lui L_{AP}. De pildă, formula φ poate fi $v_0 = 1, v_0 + v_1 = v_1 + v_0, v_0 \cdot (v_1 + v_2) = v_0 \cdot v_1 + v_0 \cdot v_2$ etc.

Modelul *standard* este $MN = \langle N, 0, S, +, \cdot \rangle$, unde N este mulţimea numerelor naturale, S este funcţia succesor, iar 0, +, · au înţelesul lor uzual. Un model M al *AP* este *nonstandard* dacă nu este izomorf cu modelul standard *MN*.

În orice model M al *AP*, pentru orice formulă φ a lui L_{AP}, sau $M \models \varphi$ sau $M \models -\varphi$. În particular, acest fapt are loc pentru modelul standard *MN* al *AP*. Atunci *Th(MN)* – teoria lui *MN*, deci mulţimea tuturor propoziţiilor adevărate în *MN* – este completă. Spunem că *Th(MN)* este *teoria completă a numerelor* (naturale). Evident, modelul standard al acestei teorii este tot *MN*.

Vom enunța în fascicolul următor rezultatele (unele dintre ele vor fi analizate pe larg în paragrafele care urmează) ale cărora demonstrații le vom studia:

a) $\mathcal{AP}$ nu este completă (teorema lui Gödel).

b) $\mathcal{AP}$ nu este nici axiomatizabilă, deci nu există nici o mulțime finită de axiome ale lui $\mathcal{AP}$ (teorema lui Rosa-Mendelevski).

c) $Th(\mathbb{N},\mathcal{M})$ are modele nestandard (teorema lui Skolem).

d) Să notăm cu $\mathcal{Q}$ teoria care rezultă din $\mathcal{AP}$ înlocuind pe (S7) cu axioma (nr. schema axiomatică):

$(\forall v_0)\,(v_0 \neq 0 \to (\exists v_1)\,(v_0 = Sv_1))$

$\mathcal{Q}$ este evident finit axiomatizabilă, dar este și ea incompletă (teorema lui Tarski, Mostowski, Robinson).

e) Teoria adițivă a numerelor – teoria având ca axiome pe (A) – (D) și (S1) – nu este finit axiomatizabilă, dar este completă (teorema lui Presburger).

§ 13. Teoremele de completitudine și compactitate

În paragraful 8 (p. 44) arătam că relația: modelul M satisface propoziția σ relativ la șirul $x_0 \dots x_n$ de obiecte din universul A al lui M nu depinde, de fapt, de șirul $x_0, \dots x_n$; teorema (13.3.1) exprimă exact acest fapt: relația de satisfacere este, în cazul propozițiilor închise, o relație între un model și o propoziție, și nu e relativă la ceva (de gândit, la un șir $x_0 \dots x_n$).

(13.1) Propoziția σ este adevărată în modelul M dacă există un șir $x_0 \dots x_n$ astfel încât (sau, echivalent, pentru orice șir $x_0 \dots x_n$) $M \models \sigma(x_0 \dots x_n)$.

Când șirul $x_0 \dots x_n$ nu este relevant, vom scrie pur și simplu $M \models \sigma$. Atunci relația se citește: σ este adevărată în M; sau: M este un model al lui σ; sau: M satisface pe σ; sau: σ este satisfăcută de M.

Vom spune că

a) σ e *falsă* în M dacă nu e adevărat că $M \models \sigma$ (echivalent, dacă $M \models \neg \sigma$);

b) σ este *validă* dacă σ este adevărată în orice model M, în simboluri $\models \sigma$.

c) σ este *realizabilă* dacă există un model M în care σ este adevărată;

d) fie Σ o anumită mulțime de propoziții. M este un *model al lui* Σ, în simboluri $M \models \Sigma$, dacă M este un model pentru toate propozițiile σ din Σ;

e) propoziția τ este *consecință* unei propoziții σ, în simboluri $\sigma \models \tau$, dacă orice model al lui σ este și model al lui τ;

f) propoziția σ este *consecință* unei mulțimi de propoziții Σ, în simboluri $\Sigma \models \sigma$, dacă orice model al lui Σ este și model al lui σ;

g) un model M este *finit* ddacă domeniul său A este o mulţime finită; M este infinit numărabil ddacă A este o mulţime *infinit numărabilă* etc.;

h) două modele M_1 şi M_2 ale lui L sunt *elementar echivalente* în simboluri $M_1 \equiv M_2$, ddacă orice propoziţie adevărată în M_1 este adevărată şi în M_2, şi invers; altfel zis, ddacă $Th(M_1) = Th(M_2)$.

Prin definiţia (h) s-a introdus relaţia „$\equiv$" între modele. Se verifică imediat că aceasta este (i) reflexivă; (ii) simetrică; (iii) tranzitivă, deci este o relaţie de echivalenţă între modele. În paragraful 9 fusese introdusă o altă relaţie de echivalenţă între modele, cea de izomorfism $\cong$. Relaţia de echivalenţă elementară priveşte *mulţimile de propoziţii adevărate* în cele două modele; cea de izomorfism este o relaţie între *structurile* celor două modele. Întrebarea care se pune imediat e următoarea: sunt cele două relaţii la fel de tari? Adică, problema e dacă au loc următoarele raporturi:

a) Dacă două modele sunt izomorfe, atunci ele sunt elementar echivalente, în simboluri
dacă $M_1 \cong M_2$, atunci $M_1 \equiv M_2$.

b) Dacă două modele sunt elementar echivalente, atunci ele sunt izomorfe, în simboluri
dacă $M_1 \equiv M_2$, atunci $M_1 \cong M_2$.

Propoziţia (a) este adevărată, adică are loc

(13.2) Dacă $M_1 \cong M_2$, atunci $M_1 \equiv M_2$.

Demonstraţie. Să presupunem că cele două modele nu sunt elementar echivalente, dar sunt izomorfe. Atunci există o propoziţie φ astfel încât $M_1 \models \varphi$, dar $M_2 \models -\varphi$. Prin inducţie asupra complexităţii lui φ vom arăta că aceasta contrazice cerinţa de izomorfism.

(i) Dacă φ este atomară şi este de forma $t_1 = t_2$, avem $M_1 \models t_1 = t_2$. Dar $M_1 \models t_1 = t_2$ ddacă $I_1(t_1) = I_1(t_2) = x$. Condiţia de izomorfism implică $I_2(t_1) = f(x) = I_2(t_2)$, de unde $I_2(t_1) = I_2(t_2)$, adică $M_2 \models t_1 = t_2$; dar s-a presupus că $M_2 \models -(t_1 = t_2)$.

(ii) Dacă φ este atomară şi este de forma $P(t_1, \ldots t_n)$, avem $M_1 \models P(t_1, \ldots t_n)$ ddacă $(I_1(t_1), \ldots I_1(t_n)) \in I_1(P)$, adică $(x_1, \ldots x_n) \in R$. Din izomorfismul lui M_1 şi M_2 decurge că $(f(x_1), \ldots f(x_n)) \in R' = I_2(P)$. Dar $f(x_1) = I_2(t_1), \ldots f(x_n) = I_2(t_n)$ şi deci $(I_2(t_1), \ldots I_2(t_n)) \in I_2(P)$, adică $M_2 \models P(t_1, \ldots t_n)$ – şi iarăşi se contrazice presupunerea că $M_2 \models -P(t_1, \ldots t_n)$.

(iii) Cazurile când φ este o propoziţie $-\psi$ sau $\psi \wedge \chi$ sau $(\forall v)\psi$ sunt lăsate ca exerciţii.

Teorema (13.2) spune următorul lucru: două sisteme – colecţii de obiecte, relaţii şi funcţii pe aceste obiecte – dacă au aceeaşi structură (= sunt izomorfe), atunci vor fi caracterizate prin aceleaşi propoziţii (privitoare la acele obiecte,

relaţii, funcţii). Dacă, de pildă, într-o uzină de automobile două produse sunt de acelaşi tip, ne putem aştepta ca ele să aibă aceleaşi performanţe. Tot ca aplicaţie a teoremei (13.2) poate fi amintit studiul prototipurilor şi al modelelor la scară ale unei clădiri, avion sau vapor.

Exerciţiu (admiţându-se teza identităţii între minte şi corp): ce se poate infera prin această teoremă din situaţia în care savanţii ar produce o copie fizică exactă a lui Bill Clinton?

Să trecem acum la relaţia (b). Ea susţine că două modele (sisteme) care sunt caracterizate prin aceleaşi propoziţii au aceeaşi structură. Căci, dacă două modele M_1 şi M_2 sunt modele pentru aceleaşi propoziţii, dar nu sunt izomorfe, atunci înseamnă că, de pildă, în M_1 are loc o relaţie $R(x, x')$ între două obiecte din domeniul A_1, însă în M_2 nu are loc relaţia corespunzătoare R' între obiectele y şi y' din A_2 corespunzătoare celor din A_1. Să ne amintim că în orice model, pentru orice propoziţie φ, sau φ, sau – φ e adevărată în acel model; în particular, în M_1 e adevărată sau propoziţia φ care descrie relaţia $R(x, x')$, sau cea care afirmă că această relaţie nu are loc, adică – φ. Desigur însă că prima relaţie e îndeplinită. Dar φ e falsă în M_2, fiindcă $M_2 \models \varphi((y, y'))$ nu are loc. Atunci ar însemna că φ e adevărată în M_1 şi falsă în M_2, ceea ce încalcă supoziţia că cele două modele sunt elementar echivalente.

Raţionamentul expus mai sus nu este însă corect. Într-adevăr, în desfăşurarea lui s-a presupus la un moment dat că relaţiei $R(x, x')$ îi corespunde propoziţia φ. Or, acest lucru trebuie dovedit. Când modelele sunt finite, nu e nici o dificultate să facem ca fiecărei relaţii din model să-i corespundă o propoziţie (atomară) şi fiecărei relaţii funcţionale între obiecte să-i corespundă, de asemenea, o propoziţie (atomară). În cazul modelelor finite avem deci

(13.3) Dacă $M_1 \equiv M_2$ şi M_1, M_2 sunt finite, atunci $M_1 \cong M_2$.

Dar dacă cele două modele sunt infinite, atunci relaţia (b) nu mai are loc în chip obligatoriu. Un prim exemplu în acest sens va fi oferit chiar în acest paragraf (propoziţia (13.11)), ca un corolar al teoremei de compactitate.

Obiectivul principal al acestui paragraf este acela de a demonstra următoarele teoreme:

(13.4) *Teorema de completitudine a lui Gödel.* Oricare ar fi propoziţia φ a lui L, φ e teoremă a lui L ddacă φ este validă, în simboluri:

$\vdash \varphi$ ddacă $\models \varphi$.

(13.5) *Teorema generalizată a completitudinii.* Oricare ar fi mulţimea Σ de propoziţii ale lui L, Σ este consistentă ddacă are un model.

(13.6) *Teorema de compactitate.* O mulţime Σ de propoziţii ale lui L are un model ddacă orice submulţime finită a lui Σ are un model.

Vom demonstra mai întîi teorema centrală, (13.5), iar pe celelalte două le vom obţine drept corolare ale acesteia. Tehnica de demonstrare a teoremei (13.5), pe care o vom folosi în cele ce urmează, a fost elaborată în 1949 de L. Henkin. Ea se bazează pe următoarea idee: atunci când se construieşte un model M pentru un limbaj L, natura elementelor din domeniul acestui model nu e relevantă; nu interesează deci ce sunt obiectele din domeniul A al lui M, nici conţinutul concret al relaţiilor ori funcţiilor definite în M. E drept că pentru, de pildă, aritmetica lui Peano obiectele din modelul M al acestei teorii ne aşteptăm să fie numere; ne aşteptăm deci ca M să fie modelul *intenţionat*, standard al teoriei. Dar acest lucru nu e necesar: e model al lui AP orice sistem care satisface toate axiomele acestei teorii, indiferent de natura obiectelor din domeniul acestui model.

Ideea lui Henkin a fost următoarea: e posibil să construim un model al unui limbaj L cu ajutorul unor obiecte pe care le avem deja la îndemână, pe care le-am construit deja. Or, noi nu avem la dispoziţie, atunci când construim pe AP, de pildă, nimic dat anterior, cu o singură excepţie: limbajul L_{AP}. Iar printre expresiile lui L_{AP} se găsesc unele care sunt folosite pentru a desemna obiecte, deci termenii lui L_{AP}. Dintre termeni, unii nu cuprind variabile, deci desemnează în mod obişnuit obiecte constante (numere fixate). Atunci am putea lua ca domeniu al unui model al AP chiar mulţimea acestor termeni constanţi al lui L_{AP}.

În general, deci, ideea lui Henkin e următoarea: putem construi un model al limbajului L în care obiectele din domeniu să fie înseşi *constantele* limbajului L. În acest caz, relaţiile dintre obiecte vor putea fi identificate cu înseşi predicatele lui L care se aplică acestor constante individuale, iar funcţiile definite pe acest domeniu cu înseşi simbolurile funcţionale ale lui L. O consecinţă imediată a acestei strategii – consecinţă care va fi exploatată mult în cele ce urmează – e următoarea: în domeniul A al acestui model nu pot să existe mai multe obiecte decât formule ale limbajului L. Căci, cum fiecare obiect din A este o constantă individuală a lui L – fie c aceasta – atunci există propoziţia $c = c$, şi deci pentru fiecare obiect din domeniu există o formulă a lui L.

Un astfel de model al lui L se numeşte *model Henkin*.

Această strategie intuitivă nu se poate aplica însă direct pentru a construi un model pentru L. Căci s-ar putea ca limbajul L să nu cuprindă nici o constantă individuală; şi vor putea interveni şi alte dificultăţi. Formularea precisă a strategiei expuse mai sus va necesita, de aceea, anumite complicaţii. Două dintre ele sunt mai importante:

1) Dacă în L nu avem destule constante individuale care să servească drept obiecte, trebuie să îi adăugăm lui L o mulţime de constante; trebuie să trecem deci la un alt limbaj L', care cuprinde toate aceste constante, alături de simbolurile lui L. Iar modelele construite vor fi modele ale lui L'.

2) Relaţia de identitate creează alte complicaţii. Dacă c şi c' sunt două constante individuale ale lui L, atunci într-un model Henkin lor le vor corespunde două obiecte *diferite* (pe care să le notăm tot cu c şi c'). Să presupunem acum că într-o mulţime Σ consistentă de propoziţii ale lui L e cuprinsă propoziţia $c = c'$; atunci, într-un model Henkin al lui Σ această propoziţie va fi adevărată. Dar pentru aceasta trebuie ca celor două constante c şi c' să le corespundă acelaşi obiect din domeniu. Or, am văzut că într-un model Henkin acest lucru nu se poate întâmpla. E nevoie, de aceea, de o anumită sofisticare a modelelor Henkin.

Pentru a face mai uşor de înţeles demonstraţia, vom restrânge raţionamentele la cazul în care:

a) limbajele L considerate au un număr finit sau cel mult infinit numărabil de simboluri (şi deci şi de constante individuale); şi

b) mulţimea variabilelor individuale $v_0, \ldots v_n, \ldots$ folosite în formalizarea lui L este infinit numărabilă, adică $n \in \omega$.

(13.7) Atunci când sunt satisfăcute condiţiile (a) şi (b) de mai sus, mulţimea formulelor lui L este infinit numărabilă.

Fie φ o formulă a lui L, având cel mult o variabilă liberă. Potrivit axiomelor cuantificatorilor, ştim că formula

(i) $(\forall\ v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$

unde $\varphi(c)$ este rezultatul substituirii în φ a fiecărei apariţii libere a lui v cu constanta c a lui L, este teoremă. Aşadar,

$\vdash (\forall\ v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$

Pe de altă parte, formula

(ii) $(\exists\ v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$

nu este teoremă. Căci dacă ar fi aşa, atunci punând $\varphi = (\neg\varphi)$ am obţine

(iii) $(\exists\ v) - \varphi \rightarrow - \varphi(c)$

şi de aici prin contrapoziţie

(iv) $\varphi(c) \rightarrow - (\exists\ v) - \varphi$

(v) $\varphi(c) \rightarrow (\forall\ v)\varphi$

ceea ce, împreună cu (ii), ar da

(vi) $(\exists\ v)\varphi \rightarrow (\forall\ v)\varphi$

Or, propoziţiile (vi) sunt toate adevărate numai în modelele cu un singur obiect în domeniu, ceea ce ar însemna ca toate modelele lui L să aibă un singur obiect.

Fie acum T o teorie formulată în L. T este, desigur, o mulţime de propoziţii. Pentru unele formule φ ale lui L cu o singură variabilă este posibil ca

(vii) $T \vdash (\exists\ v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$

pentru o constantă individuală a lui L. Dar, de bună seamă, nu avem nici o garanţie că oricare ar fi formula φ a lui L, din T va fi deductibilă o formulă de tipul

(viii) $(\exists\ v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$

Dar dacă pentru orice formulă φ a lui L cu cel mult o variabilă liberă este adevărat că

$T \vdash (\exists\ v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$

pentru un c din L, vom spune că teoria T *are martori* în L. Fie C mulţimea acelor c care, în acest caz, fac adevărată expresia (vii), pentru orice φ. Vom spune că C este mulţimea martorilor lui T în L.

Situaţia la care vrem să ajungem este următoarea: ca orice teorie T să aibă o mulţime C de martori. De cele mai multe ori însă, acest lucru nu se întâmplă. De aceea trebuie să facem să se întâmple aşa ceva. Vom proceda după cum urmează:

1) limbajului L îi vom adăuga o mulţime C de constante individuale; obţinem astfel un nou limbaj L';

2) extindem teoria T, formulată în L, la o nouă teorie T', formulată în L', pentru care C este mulţimea martorilor ei în L'.

De bună seamă că aici interesează numai teoriile consistente. Căci, dacă T ar fi inconsistentă, atunci (vii) ar fi adevărată pentru orice φ şi deci T ar avea automat martori în L. În plus, teoria T' la care este extinsă T trebuie iarăşi să fie consistentă;

Trebuie notat de asemenea că dacă pentru o teorie T_1 avem pentru un anumit φ

$T_1 \vdash (\exists\ v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$

nu e obligatoriu ca pentru o altă teorie T_2 să avem de asemenea

$T_2 \vdash (\exists\ v)\varphi \rightarrow \varphi(c)$

De aceea, dacă T_1 este extinsă în limbajul L' la o teorie T_1' în care are martori, nu avem garanţia că în L' extinderea T_2' a lui T_2 are de asemenea martori. Deci limbajele L' trebuie construite pentru fiecare teorie T în parte.

(13.8) Fie T o mulţime consistentă de propoziţii ale lui L. Fie C o mulţime numărabil infinită $c_0, \ldots c_n, \ldots$ de constante individuale care nu aparţin lui L. Să notăm cu $L' = L \cup C$ limbajul obţinut prin adăugarea la L a constantelor din C. Atunci există o teorie T' în L' care:

a) este consistentă;

b) include teoria T, deci $T \subseteq T'$;

c) are pe C ca mulţime a martorilor ei în L'.

Demonstraţie. Mulţimea formulelor lui L' este şi ea infinit numărabilă. În consecinţă, şi mulţimea formulelor cu cel mult o variabilă liberă ale lui L' este

numărabilă. De aceea, putem să aranjăm aceste formule într-un şir φ_0, ... φ_n, ... ($n \in \omega$). Să construim un şir infinit de teorii

$$T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \ldots T_n \subseteq \ldots$$

în felul următor. Fie φ_n a n-a formulă din şirul nostru Atunci punem

$$T_{n+1} = T_n \cup \{(\exists v_n)\, \varphi_n \rightarrow \varphi_n (c_n)\}$$

unde v_n este variabila liberă care apare în φ_n, dacă există; şi $v_n = v_0$, dacă nu există o astfel de variabilă în φ_n. În şirul de formule ale lui L' pe care îl avem în vedere au apărut, înaintea lui φ_n, formulele φ_0, ... φ_{n-1}. Acestea sunt în număr finit, şi fiecare dintre ele conţine un număr finit de simboluri din L'. Aşadar, în aceste formule au apărut un număr finit de simboluri constante din mulţimea C. Înainte de T_{n+1} în teoriile T_i ($i \leq n$) avem formule de forma $(\exists v_i)\, \varphi_i \rightarrow \varphi_i (c_i)$ în care, de asemenea, în consecvent au apărut simboluri din C în număr finit. De aceea îl luăm pe c_n ca fiind prima constantă individuală din şirul c_0, ... c_n, ... care nu a apărut în T_n şi nici în φ_n.

Acum să arătăm că fiecare T_{n+1} este o mulţime consistentă. Prin inducţie am presupus că toate teoriile T_i ($i \leq n$) sunt consistente. Dacă T_{n+1}, la rândul ei, nu este consistentă, atunci am avea

$$T_n \vdash -((\exists v_n)\varphi_n \rightarrow \varphi_n(c_n))$$

adică, prin logica propoziţională,

$$T_n \vdash ((\exists v_n)\varphi_n \wedge -\varphi_n(c_n))$$

Dar c_n nu apare nici în φ_n, nici în celelate propoziţii din T_n. Aşadar, putem conchide prin generalizare universală că

$$T_n \vdash (\forall v_{n+1})\, ((\exists v_n)\varphi_n \wedge -\varphi_n(v_{n+1}))$$

de unde

$$T_n \vdash (\exists v_n)\varphi_n \wedge (\forall v_{n+1}) -\varphi_n(v_{n+1})$$

adică

$$T_n \vdash (\exists v_n)\varphi_n \wedge -(\exists v_n)\varphi_n$$

ceea ce contrazice ipoteza că T_n este consistentă.

Acum definim $T' = \bigcup_{n \in \omega} T_n$. Evident, T' include orice T_n şi, în particular, $T = T_0 \subseteq T'$. În al doilea rând, T' este consistentă; într-adevăr, dacă T' nu ar fi consistentă, atunci ar exista o demonstraţie ψ_0, ... ψ_m a unei contradicţii în T'. Or, se poate alege un n astfel încât toate aceste propoziţii m să aparţină lui T_n şi deci această T_n ar fi contradictorie, ceea ce am presupus că nu e cazul. În sfârşit, T' are pe C ca mulţime a martorilor ei în L'. Căci, dacă φ este o formulă a lui L' cu cel mult o variabilă v liberă, atunci $\varphi = \varphi_n$ pentru un $n \in \omega$ şi $v = v_n$. Atunci în T_{n+1} e deductibilă propoziţia $(\exists v_n)\, \varphi_n \rightarrow \varphi_n (c_n)$, pentru un c_n din C. Dar $T_{n+1} \subseteq T'$ şi deci această propoziţie a deductibilă şi în T', q.e.d.

Să observăm acum următorul lucru: dacă T are o mulţime C de martori în L, iar $T \subseteq T'$, atunci C este o mulţime de martori în L şi pentru T'. În particular:

(13.9) Dacă T are o mulţime C de martori în L, atunci ea poate fi extinsă la o mulţime maximal consistentă T' având pe C ca mulţime de martori în L.

Prin lema (13.8) s-a înlăturat prima dificultate în construirea modelelor Henkin. Lema (13.10) va arăta cum putem face faţă şi celei de-a doua dificultăţi, care provenea din existenţa simbolului identitate în formalizarea limbajului L.

(13.10) Fie T o mulţime consistentă de propoziţii, iar C o mulţime de martori ai lui T în limbajul L. Atunci T are un model M cu următoarea proprietate: orice obiect din domeniul A al lui M este interpretarea unei constante $c \in C$.

Vom spune că M este *modelul canonic* al lui T.

Demonstraţie. Potrivit lemei (13.9), există o teorie T' maximal consistentă care are pe C ca mulţime de martori în L. Vom arăta că T' are un model cu proprietatea cerută. Cum T' e o extindere a lui T, va însemna că acel model e şi model al lui T.

Pentru a întâmpina dificultatea (2) menţionată înaintea lemei (13.7), vom proceda astfel: interpretăm o constantă c în modelul M nu ca c însăşi, ci ca mulţimea tuturor constantelor lui C care în T' stau în relaţie de identitate cu c. Să presupunem că propoziţia $c = c'$ e deductibilă din T', deci că

$$T' \vdash c = c'$$

Cum T' e maximal consistentă, înseamnă că avem şi

$$(c = c') \in T'.$$

Să notăm cu $E(c)$ mulţimea acestor c'; în simboluri,

$$E(c) = \{c' : (c = c') \in T'\}$$

Fie $d \in L$. Dacă $d \in E(c)$ şi $d \in E(c'')$, atunci $E(c) = E(c'')$. Într-adevăr, avem $(d = c) \in T'$ şi $(d = c') \in T'$. Aplicând axiomele identităţii, avem $(c = c') \in T'$. Dacă pentru un $d' \in C$ avem $d' \in E(c)$ dar $d' \notin E(c')$ atunci înseamnă că $(d' = c) \in T'$, dar $-(d' = c') \in T'$. Însă din $(d' = c) \in T'$ şi $(c = c') \in T'$ decurge că $(d' = c') \in T'$ – contradicţie. Prin urmare, o constantă individuală $d \in L$ nu poate aparţine decât unei singure mulţimi de forma $E(c)$.

Pentru a proba lema (13.10) sunt necesari doi paşi: a) să se construiască un model M care să satisfacă proprietatea dorită; b) să se demonstreze faptul că într-adevăr M este un model al lui T'.

a) Modelul M se construieşte astfel:

1) Domeniul A al lui M este colecţia mulţimilor $E(c)$, în simboluri

$$A = \{E(c) : c \in C\}$$

2) Interpretarea constantelor lui L. Fie $d \in L$. Potrivit axiomelor identităţii, avem

(i) $\vdash d = d$

Prin generalizarea existenţială, obţinem

(ii) $\vdash (\exists\ v)\ (v = d)$

Mulţimea T' este consistentă, şi deci

(iii) $T' \vdash (\exists\ v)\ (v = d)$

Să observăm acum că formula $v = d$ conţine o variabilă liberă. Cum T' are pe C ca mulţime de martori în L, înseamnă că

(iv) $T' \vdash (\exists\ v)\ (v = d) \rightarrow d = c$

pentru un $c \in C$. Din (iii) şi (iv) decurge

(v) $T' \vdash d = c$

Întrucât T' e maximal consistentă, avem $(d = c) \in T'$. Atunci $d \in E(c)$. Am văzut mai devreme că d nu poate aparţine unor mulţimi diferite $E(c)$ şi $E(c')$. Punem $I(d) = E(c) \in A$.

3) Interpretarea predicatelor lui L. Fie P un predicat m-ar. Lui îi corespunde prin interpretare a relaţie m-ară R, astfel: pentru orice constante $c_1, \ldots c_m$ din C,

$R(E(c_1, \ldots E(c_m))$ ddacă $P(c_1, \ldots c_m) \in T'$

Fie acum m constante $d_1, \ldots d_m$ din L (deci nu neapărat din C). Potrivit celor de mai sus, avem m constante din C astfel încât

$(d_1 = c_1) \in T' \ldots (d_m = c_m) \in T'$

Să presupunem că avem $P\ (d_1, \ldots d_m) \in T'$. Potrivit axiomelor identităţii, decurge că

$\vdash P\ (d_1, \ldots d_m) \wedge (d_1 = c_1) \wedge \ldots (d_m = c_m) \rightarrow P(c_1, \ldots c_m)$

Atunci vom avea şi $P(c_1, \ldots c_m) \in T'$ şi deci $R(E\ (c_1), \ldots E(c_m))$. Prin urmare,

$R(E\ (c_1), \ldots E(c_m))$ ddacă $P(d_1, \ldots d_m) \in T$

4) Interpretarea simbolurilor fincţionale ale lui L. Dacă F este un simbol funcţional n-ar, atunci $I(F) = G$ este o funcţie n-ară $A^n \rightarrow A$. G se defineşte astfel: oricare ar fi constantele $c, c_1, \ldots c_n$ din C,

$G(E(c_1), \ldots E(c_n)) = E(c)$ ddacă $(F(c_1, \ldots c_n) = c) \in T'$

Ca şi în cazul (3), interpretarea funcţiei F se construieşte şi pentru cazul când argumentele şi valoarea acestei funcţii sunt constante oarecare (nu neapărat din C) ale lui L.

Cu aceasta, trecem la punctul (b) al demonstraţiei.

b) Trebuie arătat că pentru orice formulă φ,

$\varphi \in T'$ ddacă $M \models \varphi$.

Demonstraţia se face prin inducţie asupra complexităţii lui φ. Vom începe cu formulele atomare ale lui L.

1) Fie t un termen fără nici o variabilă liberă. Atunci, potrivit interpretării simbolurilor funcţionale ale lui L (punctul (4) de mai sus), avem

$M \models (t = c)$ ddacă $(t = c) \in T'$

pentru orice constantă c din C.

În cazul general, trebuie să arătăm că pentru orice t_1 şi t_2,

$M \models (t_1 = t_2)$ ddacă $(t_1 = t_2) \in T'$

Să presupunem, într-adevăr, că avem $(t_1 = t_2) \in T'$. Atunci, cum formula $(t_1 = v)$ are o singură variabilă liberă, pe v, înseamnă că

$((\exists\, v)\,(t_1 = v) \rightarrow (t_1 = c)) \in T'$, pentru un c din C

Dar $(\exists\, v)\,(t_1 = v) \in T'$ şi deci trebuie că $(t_1 = c) \in T'$. La fel, se arată că $(t_2 = c') \in T'$, pentru un c' din C. Dar, conform celor arătate anterior, avem

$M \models (t_1 = c)$ şi $M \models (t_2 = c')$

Ţinând cont, pe de altă parte, că $(t_1 = t_2) \in T'$, avem $(c = c') \in T'$ şi deci

$M \models (c = c')$

de unde

$M \models (t_1 = t_2)$

Invers, să presupunem că avem $M \models (t_1 = t_2)$. Aceasta înseamnă că $I(t_1) = E(c) = I(t_2)$. Din definiţia interpretării simbolurilor funcţionale ale lui L în M, avem

$(t_1 = c) \in T'$ şi $(t_2 = c) \in T'$

de unde, în chip evident,

$(t_1 = t_2) \in T'$

2) Fie φ o formulă atomară a lui L, fără variabile libere. (Atât în acest pas, cât şi în cel anterior, am considerat doar formule atomare în care nu apar variabile libere, deci doar propoziţii atomare; motivul este acela că ne interesează să demonstrăm că M este model pentru T', iar T' este o mulţime maximală de *propoziţii;* în T' nu apar formule care nu sunt propoziţii.) De pildă, fie $\varphi = P(t_1, \ldots t_m)$. Atunci

$M \models P(t_1, \ldots t_m)$ ddacă $P(t_1, \ldots t_m) \in T'$

Fie $P(t_1, \ldots t_m) \in T'$. Ştim că există $c_1, \ldots c_m$ din C încât

$(t_1 = c_1) \in T'$, ... $(t_m = c_m) \in T'$

Atunci, întrucât

$\vdash P(t_1, \ldots t_m) \wedge (t_1 = c_1) \wedge \ldots (t_m = c_m) \rightarrow P(c_1, \ldots c_m)$

înseamnă că $P(c_1, \ldots c_m) \in T'$ şi deci, ţinând seamă de definiţia lui M,

$R(E(c_1), \ldots E(c_m))$ are loc în M.

Dar, pe de altă parte,

$M \models P(t_1, \ldots t_m)$ $((E(c_1), \ldots E(c_m)))$ ddacă $R(E(c_1), \ldots E(c_m))$

de unde decurge că

$M \models P(t_1, \ldots t_m)$

Invers, să presupunem că $M \models P(t_1, \ldots t_m)$; atunci $R(E(c_1), \ldots E(c_m))$, de unde rezultă că $P(t_1, \ldots t_m) \in T'$. Aplicând iarăşi axioma identităţii, avem

$\vdash P(c_1, \ldots c_m) \wedge (t_1 = c_1) \wedge \ldots (t_m = c_m) \rightarrow P(t_1, \ldots t_m)$

de unde decurge că $P(t_1, \ldots t_m) \in T'$.

La fel se poate demonstra când φ este o formulă atomară de forma $F(t_1, \ldots t_N) = t$.

3) Rămân cazurile în care

a) $\varphi = - \psi$

b) $\varphi = \psi \wedge \chi$

c) $\varphi = (\exists\, v)\, \psi$

Primele cazuri vor fi lăsate ca exerciţii. Să îl considerăm pe al treilea. Aşadar, trebuie să arătăm că

$M \models (\exists\, v)\, \psi$ ddacă $((\exists\, v)\, \psi \in T'$

Necesitatea. Să presupunem că $((\exists\, v)\, \varphi) \in T'$. Dar pentru ca această formulă să fie o propoziţie, trebuie ca în ψ să apară cel mult o variabilă liberă. Or, T' are în L o mulţime C de martori, deci

$((\exists\, v)\, \psi \rightarrow \psi(c)) \in T'$ pentru un c din C

Prin modus ponens, obţinem $\psi(c) \in T'$. Potrivit inducţiei, avem atunci

$M \models \psi(c)$

Dar, cum

$M \models (\psi(c) \rightarrow (\exists\, v)\, \psi)$

decurge că

$M \models (\exists\, v)\, \psi$.

Invers, dacă $M \models (\exists\, v)\, \psi$, atunci pentru un obiect $E(c) \in A$, avem

$M \models \psi((E(c)))$

adică

$M \models \psi(c)$

Prin inducţie, ştim că $\psi(c) \in T'$. Însă, potrivit axiomelor cuantificatorilor,

$\vdash \psi(c) \rightarrow (\exists\, v)\, \psi$

şi deci $((\exists\, v)\, \psi) \in T'$.

Aşadar, M este model pentru T'. Întrucât $T \subseteq T'$, înseamnă că M este model şi pentru T, q.e.d.

Cu aceasta, sunt pregătite condiţiile pentru a demonstra teoremele (13.4), (13.5) şi (13.6).

Demonstraţia teoremei (13.5):

1. Necesitatea. Presupunem că mulţimea Σ de propoziţii ale lui L are un model M şi să arătăm că ea este consistentă. Dar dacă nu ar fi consistentă, ar exista o demonstraţie $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ a lui $(\psi \wedge (- \psi))$ din Σ.

Exerciţiu: să se arate că orice φ_i este adevărată în M. Cum $\varphi_n = (\psi \wedge (-\psi))$ nu poate fi adevărată în nici un model M, să se deducă faptul că $\varphi_1, \ldots \varphi_n$ nu e o demonstraţie a lui φ_n – deci că se obţine o contradicţie.

2. Suficienţa. Presupunem că Σ e consistentă şi să arătăm că are un model. Mai întâi vom arăta că o extindere a ei Σ' are un model. Construim un limbaj $L' = L \cup C$, astfel încât, potrivit lemei (13.8), extinderea în L' a lui Σ – anume Σ' – are pe C ca mulţime de martori. În al doilea rând, lema (13.10) arată că există un model M' al lui Σ' în L'. Deoarece $\Sigma \subseteq \Sigma'$, înseamnă că M' e un model şi al mulţimii Σ, în simboluri $M' \models \Sigma$. Să notăm că M' este un model al lui Σ în limbajul L'. Dar L' diferă de L doar prin faptul că are în plus anumite constante. Deci dacă în definiţia lui M' nu avem în vedere că unele obiecte sunt interpretări ale constantelor din C, obţinem un model M'', care

1) e un model al Σ;

2) e un model al lui Σ în limbajul L, q.e.d.

Trecem acum la teorema (13.4). Ea arată că clasa teoremelor lui L este aceeaşi cu clasa propoziţiilor valide ale lui L.

1. Suficienţa: Dacă o propoziţie σ este teoremă, atunci este validă. Să presupunem că σ este teoremă. Atunci există o demonstraţie $\varphi_1, \ldots \varphi_n = \sigma$ a lui σ în L. Prin inducţie se arată că orice formulă φ_i este adevărată în orice model M al lui L, şi deci $\varphi_n = \sigma$ este adevărată în orice model M al lui L.

2. Necesitatea: Dacă o propoziţie σ este validă, atunci este teoremă. Adică: dacă σ e adevărată în toate modelele M ale lui L, atunci σ este teoremă. În logica propoziţională există tautologia (= legea contrapoziţiei):

$\vdash ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (- \psi \rightarrow - \varphi))$

Aplicând-o aici, decurge că ceea ce trebuie să devedim este că: dacă σ nu este o teoremă, atunci σ nu este adevărată în toate modelele lui L. Deci există un model M în care $-\sigma$ e adevărată, în simboluri $M \models - \sigma$. Să presupunem deci că σ nu e teoremă. Dar σ e teoremă ddacă $\{- \sigma\}$ e inconsistentă. Aşadar, dacă σ nu e o teoremă, înseamnă că $\{- \sigma\}$ e o mulţime consistentă de propoziţii. Atunci, potrivit teoremei (13.5), $\{- \sigma\}$ are un model M, deci $M \models - \sigma$, q.e.d.

În sfârşit, să demonstrăm teorema de compactitate, (13.6): o mulţime Σ de propoziţii are un model ddacă orice submulţime finită Γ a lui Σ are un model.

1. Suficienţa: Dacă M e un model al lui Σ, atunci e model şi pentru submulţimea finită Γ a lui Σ. Acest lucru este evident, ţinând seamă că M e model al lui Σ ddacă M e model pentru orice propoziţie din Σ, deci şi pentru orice propoziţie din Γ.

2. Necesitatea: Dacă oricare ar fi mulţimea finită $\Gamma \subseteq \Sigma$, Γ are un model, atunci există un model al lui Σ. Într-adevăr, să presupunem că orice astfel de

Γ are un model, dar că Σ nu are nici un model. Atunci, potrivit teoremei (13.5), înseamnă că Σ nu este consistentă. Adică, $\Sigma \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$. Prin urmare, există o demonstrație $\varphi_1, \ldots \varphi_n = (\psi \wedge \neg\psi)$ în care intervin un număr finit m ($m \leq n$) de propoziții din Σ. Fie Γ mulțimea acestora. Dar Γ e inconsistentă, așadar, iarăși potrivit teoremei (13.5), Γ nu are nici un model – ceea ce contrazice supoziția făcută, q.e.d.

O aplicație a teoremei de compactitate

Teorema de compactitate are multe aplicații interesante. Una dintre acestea e următoarea: în paragraful anterior am menționat modelul standard *MN* al aritmeticii lui Peano. Propozițiile adevărate în acest model, *Th*(*MN*), formează o mulțime maximal consistentă de propoziții ale lui L_{AP}. Așadar, pentru oricare propoziție a acestui limbaj, sau aceasta sau contradictoria ei e adevărată în *MN* și, deci, aparține lui *Th*(*MN*). Ar decurge de aici că am obținut o teorie de ordinul întâi – anume, *Th*(*MN*) – care caracterizează numerele naturale, adică ea are ca modele numai sisteme de felul lui *MN* (deci: modelele lui *Th*(*MN*) sunt *MN* însuși și modelele izomorfe cu *MN*).

Această concluzie este însă falsă; pentru că există modele *M* ale lui L_{AP} care sunt elementar echivalente cu *MN*, dar nu sunt izomorfe cu acesta. Putem demonstra că e așa apelând la mai multe metateoreme ale logicii predicatelor. Teorema de compactitate se poate deja folosi chiar aici pentru a produce un model nestandard al *AP*.

Fie $L_{AP} = \{0, S, +, \cdot\}$ limbajul aritmeticii lui Peano. Vom construi un nou limbaj $L' = L_{AP} \cup \{c\}$, adăugând lui L_{AP} o constantă c. Să observăm că în L_{AP} – și deci și în L' – pot fi definite diverse relații între numere, de exemplu relația $<$ (n este (strict) mai mic decât m), în felul următor:

$n < m$ = df. $(\exists\ v)\ (n + Sv = m)$

Acum, construim o teorie Σ în felul următor: Σ este *Th*(*MN*), căreia i se adaugă propozițiile

$0 < c$
$1 < c$
$2 < c$
.
.
.

pentru orice n. Vom arăta că Σ are un model . Într-adevăr, fie Γ o parte oarecare finită a lui Σ. În Γ sunt menționate numere; dar acestea nu pot fi decât în număr finit, fiindcă Γ e finită. Fie n cel mai mare dintre acestea. Atunci, luăm ca model al lui Γ modelul standard *MN*, în care interpretăm pe c ca Sn. Dacă

o propoziţie σ din Γ aparţine lui *Th(MN)*, atunci sigur e adevărată în MN; dacă nu aparţine lui *Th(MN)*, atunci e de forma $m < c$. Dar şi atunci această propoziţie e adevărată, căci interpretarea lui c în *MN* e luată ca mai mare decât orice număr menţionat în Γ, deci şi decât m.

Întrucât Γ e o submulţime oarecare finită a lui Σ, prin teorema de compactitate (13.6) decurge că Σ are un model *M*. Dar, cum *Th(MN)* e inclusă în Σ, înseamnă că *M* este model şi pentru *Th(MN)*. În *M* sunt adevărate exact aceleaşi propoziţii ale limbajului L_{AP} al aritmeticii lui Peano care sunt adevărate şi în modelul standard al acestei teorii. Însă în *M* există un obiect (interpretarea lui *c*) care e mai mare decât toate numerele naturale. În *M* există un obiect care e un număr infinit. Acest model *M* este deci un model *nestandard* al aritmeticii lui Peano (şi al teoriei complete a numerelor). El are următoarele caracteristici:

1) este elementar echivalent cu *MN*, căci în *M* şi *MN* sunt adevărate exact aceleaşi propoziţii ale lui L_{AP}, anume cele din *Th(MN)*;

2) nu este izomorf cu *MN*, căci obiectului infinit din domeniul lui *M* nu-i corespunde nimic în domeniul lui *MN*.

Aşadar, să scriem:

(13.11) Teoria completă a numerelor *Th(MN)* are un model nestandard.

Acest rezultat ne arată că nu putem întări teorema (13.3) pentru a afirma că dacă două modele sunt elementar echivalente, atunci ele sunt şi izomorfe.

Cum arată un astfel de model nestandard al teoriei complete a numerelor? (Un rezultat surprinzător este, cum vom vedea, următorul: dacă în domeniul lui apare un obiect infinit, atunci vor trebui să apară infinit de multe astfel de obiecte infinite). Pentru a răspunde acestei întrebări, vom proceda astfel: *MN* şi *M* sunt elementar echivalente, adică în ele sunt adevărate exact aceleaşi propoziţii ale limbajului L_{AP} al aritmeticii lui Peano. Plecând de aici, ori de câte ori numerele naturale au o anumită proprietate – adică ori de câte ori o propoziţie σ e adevărată în *MN* – conchidem că obiectele din domeniul lui *M* au aceeaşi proprietate (căci σ e adevărată şi în *M*). Apoi, încercăm să descifrăm ce spune acea propoziţie despre obiectele din domeniul lui *M*.

Fie deci $M = \langle A, z, s, \&, \S \rangle$. Aici *A* este domeniul lui *M*, *z* este obiectul din *A* prin care e interpretată constanta 0, deci $I(0) = z$, şi mai departe $I(S) = s$, $I(+) = \&$, $I(\cdot) = \S$. Să numim obiectele din *A NUMERE* (obiectele din domeniul lui *MN* vor fi numite în continuare *numere*). Pentru a-l construi pe *M*, să plecăm de la unele propoziţii adevărate în *MN*. În *MN* se poate defini, aşa cum am văzut, relaţia de ordine strictă *mai mic decât*. Prin urmare, o putem defini şi în *M*. Vom nota această relaţie cu $\lhd$. Cum în *MN* e adevărat că

$(\forall\ v) - (v < v)$

înseamnă că în M această propoziţie e de asemenea adevărată şi deci că oricare ar fi NUMĂRUL x, nu e adevărat că $x \nless x$. Relaţia $<$ şi deci şi $\nless$ este totală, adică

$$(\forall\ v_1)\ (\forall\ v_2)\ (v_1 < v_2 \vee v_2 < v_1)$$

Apoi, ştim că orice număr este fie par, fie impar. Adică, dacă x e un număr, atunci există un alt număr y astfel încât

$$x = y + y \text{ sau } x = y + y + 1$$

Analog, în M pentru fiecare NUMĂR x există un NUMĂR y astfel încât

$$x = y \,\&\, y \text{ sau } x = y \,\&\, y \,\&\, 1$$

În sfârşit, să observăm că în MN orice număr (cu excepţia lui 0) este succesorul unui singur număr. Prin urmare, putem defini o funcţie R inversă celei de succesor S, în felul următor:

$$R(0) = 0$$
$$R(Sx) = x$$

Prin S, lui 2 îi corespunde 3; prin R, lui 3 îi corespunde 2 etc. În modelul M, se construieşte deci o funcţie r, definită prin:

$$r(z) = z$$
$$r(s(x)) = x$$

Acum vom trece la cercetarea efectivă a felului cum arată modelul M. În primul rând, în M există un NUMĂR care corespunde lui zero, e deci NUMĂRUL zero în M, anume z. Cu ajutorul funcţiei s, construim acum o submulţime a lui A, formată din toţi succesorii lui z:

$$z,\ s(z),\ s(s(x)),\ s(s(s(z))),\ s(s(s(s(z)))),\ \ldots$$

Vom numi aceste obiecte NUMERE standard. Şirul acestora este, aşa cum se vede cu uşurinţă, izomorf cu şirul 0, 1, 2, 3, 4, ... al numerelor naturale. Într-adevăr, oricărui număr natural îi corespunde un şi numai un NUMĂR standard, iar $n < m$ ddacă $f(n) \nless f(m)$.

Intenţia noastră e de a pune într-un şir toate NUMERELE (să ne amintim că mulţimea A este numărabilă). În acest şir, segmentul iniţial va fi construit de NUMERELE standard. Ştim însă că în M există NUMERE care nu sunt standard, care sunt mai mari decât orice NUMĂR standard. Aceste NUMERE vor urma în şir *după* ce am cuprins în acesta toate NUMERELE standard.

Fie acum două NUMERE x şi y. Vom spune că ele sunt M-echivalente ddacă există un NUMĂR standard a astfel încât $x \,\&\, a = y$ sau $y \,\&\, a = x$. Intuitiv, aceasta înseamnă că putem obţine pe cel mai mare dintre ele aplicând asupra celuilalt, de un număr *finit* de ori, funcţia z. Evident, oricare două NUMERE standard sunt M-echivalente. Într-adevăr, să presupunem că m este strict mai mare decât n şi că ambele NUMERE sunt standard. NUMĂRUL m a fost obţinut

aplicând de m ori funcţia s asupra lui z, iar n – aplicând de n ori funcţia s asupra lui z. Aşadar, există NUMĂRUL finit $m-n$ care e cel căutat. Pe de altă parte însă, nici un NUMĂR standard nu este M-echivalent cu unul nestandard c. Căci să presupunem că c ar fi M-echivalent cu un NUMĂR standard m; dacă însă aplicăm de un număr finit de ori, fie acesta n, funcţia s asupra lui m, obţinem NUMĂRUL $m + n$, care e la rândul lui standard.

Dacă x e un NUMĂR, vom spune că *segmentul* lui x e mulţimea tuturor NUMERELOR M-echivalente cu x.

Toate NUMERELE standard – deci toate NUMERELE care corespund numerelor naturale – fac parte dintr-un singur segment, cel care începe cu z (şi nici un NUMĂR nestandard nu face parte din acest segment). Acest segment standard e infinit, dar numai într-o singură direcţie, spre NUMERE mai mari. Fie acum c un NUMĂR nestandard. Segmentul lui x nu este cel standard, căci atunci ar trebui ca c să fie M-echivalent cu un NUMĂR standard, ceea ce am văzut că nu e posibil. Atunci:

1) Orice succesor al lui c este a) în acelaşi segment cu c; b) nestandard. Prin urmare, în segmentul lui c avem şirul infinit

$c,\ s(c),\ s(s(c)),\ s(s(s(c))),\ s(s(s(s(c)))),\ \ldots$

2) Orice predecesor al lui c este a) în acelaşi segment cu c; b) nestandard. Prin urmare, în segmentul lui c avem şirul infinit

$\ldots\ r(r(r(r(c)))),\ r(r(r(c))),\ r(r(c)),\ r(c),\ c$

Se poate verifica uşor că cele două propoziţii sunt adevărate. Din ele decurge că segmentul lui c este un şir infinit în ambele direcţii: şi spre NUMERE mai mari, şi spre NUMERE mai mici, deci e de forma:

$\ldots\ r(r(r(c))),\ r(r(c))),\ r(c),\ c,\ s(c),\ s(s(c)),\ s(s(s(c))),\ \ldots$

Acest şir este izomorf cu mulţimea *numerelor întregi*, unde c stă pentru 0, $s(c)$ pentru 1, $r(c)$ pentru –1 etc. În general, succesorii lui c corespund întregilor pozitivi, iar predecesorii lui c – întregilor negativi.

Segmentul lui c stă, în şirul tuturor NUMERELOR, pe care vrem să-i construim, după segmentul standard.

Dar, ne putem întreba: există un *singur* segment nestandard? Răspunsul la această întrebare este parte a teoremei (13.12), care rezumă felul în care arată un model nestandard numărabil al teoremei complete a numerelor:

(13.12) Elementele domeniului unui model nestandard numărabil al teoriei complete a numerelor pot fi linear ordonate de relaţia de ordine strictă $<$ şi:

a) segmentul iniţial al şirului astfel obţinut este segmentul standard, care este izomorf cu numerele naturale;

b) orice segment nestandard este izomorf cu şirul numerelor întregi;

c) între orice segment nestandard şi segmentul standard se intercalează un alt segment nestandard;

d) între oricare două segmente nestandard se intercalează un alt segment nestandard.

Punctele (a) şi (b) au fost probate mai devreme. Punctele (c) şi (d) afirmă, în esenţă, următorul lucru: fie SEGM mulţimea tuturor segmentelor de NUMERE din M. Această mulţime – aşa cum se poate constata uşor – este ordonată de o relaţie de ordine strictă $<\cdot$ Într-adevăr, putem pune:

$X <\cdot Y$ = df. există un $x \in X$ şi un $y \in Y$ astfel încât $x \lhd y$ şi x şi y nu sunt M-echivalente.

Dacă are loc condiţia din definiens, evident că are loc şi relaţia:

oricare ar fi $x \in X$ şi $y \in Y$, $x \lhd y$.

Punctele (c) şi (d) afirmă că $<\cdot$ este o relaţie de ordine strictă pe SEGM care:

1) admite segmentul standard ca element minimal (a se vedea definiţia (12.6.5));

2) este densă (a se vedea definiţia (12.6.3)).

Decurge de aici că şirul SEGM de segmente de NUMERE este izomorf cu şirul numerelor *raţionale* pozitive.

Vom demonstra punctul (c) al teoremei (13.12); punctul (d) este lăsat ca exerciţiu.

Să presupunem că există un segment nestandard X în SEGM care urmează imediat după segmentul standard. Să presupunem că NUMĂRUL d aparţine lui X. Dar d este sau par sau impar. Prin urmare, există un NUMĂR c astfel încât

$c \,\&\, c = d$ sau $c \,\&\, c \,\&\, s(z) = d$

Să luăm primul caz (în celălalt raţionamentul decurge analog). NUMĂRUL c, potrivit supoziţiei făcute, aparţine sau segmentului standard, sau lui X. Dacă c e standard, atunci desigur că şi d trebuie să fie standard, ceea ce încalcă supoziţia făcută. Prin urmare, c este nestandard. Presupunem acum că c aparţine de asemenea segmentului X. Potrivit definiţiei segmentului, aceasta înseamnă că c şi d sunt M-echivalente, adică (ţinem aici seamă de faptul că $c \lhd d$) există un NUMĂR standard x astfel încât

$c \,\&\, x = d$.

Dar cum, pe de altă parte, am presupus că $c \,\&\, c = d$, avem

$c \,\&\, c = c \,\&\, x$

de unde decurge că

$c = x$

ceea ce contrazice faptul că c *nu* este un NUMĂR standard. Aşadar,

1) c nu este un NUMĂR standard;

2) $c \lhd d$;

3) c nu aparţine segmentului X; c va aparţine unui alt segment Y, iar Y trebuie să fie nestandard – ceea ce contrazice ipoteza că X urmează în şirul SEGM imediat după segmentul standard, q.e.d.

§ 14. Teoremele Löwenheim–Skolem

Teoremele care vor fi formulate în acest paragraf, la fel ca şi teorema de compactitate, sunt teoreme de *caracterizare* a logicii de ordinul întâi a predicatelor (cf. paragraful 16 în acest sens). Mai direct, ele probează următorul lucru: în logica de ordinul întâi, nu putem distinge între

1) mulţimi finite şi mulţimi infinite;

2) mulţimi infinite numărabile şi mulţimi infinite nenumărabile.

Aceasta în sensul următor: 1) o teorie care are un model finit, dar arbitrar de mare, are şi un model infinit; 2) o teorie are un model infinit numărabil ddacă are şi unul infinit nenumărabil. Decurge de aici că nu putem spera ca, apelând la teorii de ordinul întâi, să caracterizăm mulţimile finite, ori pe cele infinit numărabile, ori pe cele infinit nenumărabile. În logica de ordinul întâi nu putem defini noţiunile de finit şi infinit (numărabil sau nenumărabil). Într-adevăr, se poate demonstra că:

(14.1) Dacă o teorie T are modele finite oricât de largi, atunci are şi un model infinit.

(14.2) *Teorema descendentă Löwenheim–Skolem* . Dacă o teorie T are un model infinit, atunci are şi un model infinit numărabil.

(14.3) *Teorema ascendentă Löwenheim–Skolem.* Dacă o teorie T are un model infinit, atunci are un model infinit de orice putere (în particular, dacă are un model infinit numărabil, atunci are un model infinit nenumărabil).

Demonstraţia teoremei (14.1). Presupunem că teoria T, formulată în limbajul L, are modele finite oricât de largi. Adică, pentru orice număr natural n, T are un model în al cărui domeniu se află cel puţin n obiecte. Fie acum un nou limbaj L' construit prin adăugarea la L a unui număr infinit de constante c_i ($i \in \omega$). Aceste constante presupunem că nu aparţineau lui L. În acest nou limbaj construim o nouă teorie T' adăugând lui T toate propoziţiile de forma

$$-(c_i = c_j), \text{ cu } i < \omega,\ j < \omega,\ i \neq j.$$

Ideea demonstraţiei este să arătăm că teoria T' are un model. Cititorul care a înţeles sensul teoremei de compactitate va bănui imediat, din chiar felul în care a fost formulată teorema (14.1), că pentru a dovedi că T' are un model trebuie arătat că orice submulţime finită a lui T' are un model, din care prin compactitate va decurge că şi T' are un model. Fie deci Γ o submulţime oarecare finită a lui T'. În Γ vor apare cel mult constantele $c_1, \ldots c_m$, pentru un număr

finit m. Ştim că T are modele finite arbitrar de largi. Atunci va avea şi un model M_n cu un număr $n > m$ de obiecte în domeniu. Să arătăm că acest model M_n e şi un model al lui Γ. Dacă o propoziţie σ a lui Γ aparţine lui T, atunci sigur σ e adevărată în M_n, fiindcă în acest model sunt adevărate toate propoziţiile din T. Dacă însă σ din Γ nu aparţine lui T, înseamnă că este o propoziţie de forma

$$\neg(c_i = c_j)$$

unde, potrivit supoziţiei, $i < m$, $j < m$, $i \neq j$. Cum în domeniul A al lui M_n există $n > m$ obiecte, înseamnă că putem interpreta în M_n constantele individuale c_i, c_j (i, $j < m$) astfel încât $I(c_i) \neq I(c_j)$ şi deci astfel încât orice propoziţie de forma indicată de mai sus din Γ să fie adevărată în M_n. Aşadar, M_n e model al lui Γ.

Atunci, prin teorema de compactitate, teoria T' are un model M. Dar T este inclusă în T', deci M este un model şi pentru T. Aşa cum am procedat în demonstraţia teoremei (13.5) (suficienţa), putem considera numai reducerea M' a acestui model M la limbajul L: M' e atunci un model al limbajului L pentru T şi este, evident, infinit.

Să trecem acum la teorenele Löwenheim–Skolem. Teorema descendentă se obţine cu uşurinţă din teorema generalizată a completitudinii (13.5). Să presupunem, într-adevăr, că teoria T are un model. Potrivit lui (13.5), înseamnă că T este consistentă. Atunci ea are, conform lemei (13.10), un model canonic M. În acest model fiecare obiect este interpretarea unei constante individuale c. Însă în limbajul lui T nu există decât cel mult un număr infinit numărabil de constante individuale – şi deci domeniul lui M nu poate cuprinde decât cel mult un număr infinit numărabil de obiecte, q.e.d.

Teorema ascendentă Löwenheim–Skolem se demonstrează asemănător cu teorema (14.1). Fie teoria T formulată în limbajul L, care are un model infinit numărabil. Fie acum C o mulţime infinit nenumărabilă de constante individuale c_α care nu apar în L. Se construieşte în $L' = L \cup C$ mulţimea

$$T' = T \{\neg(c_\alpha = c_\beta) : \alpha \neq \beta\}$$

La fel ca la (14.1) se arată că T' are un model. Atunci, prin (13.5), T' este consistentă şi, prin (13.10), are un model canonic în care fiecare obiect este interpretarea unei constante c_α. Evident, acest model este infinit nenumărabil, q.e.d.

Teoremele Löwenheim–Skolem sunt unele dintre cele mai tulburătoare rezultate obţinute în logică. Vom menţiona două contexte în acest sens.

Mai întâi, să vedem ce se întâmplă dacă încercăm să aplicăm aceste teoreme celor mai importante teorii formalizate în logica predicatelor de ordinul întâi – *aritmetica lui Peano* şi *teoria mulţimilor*.

(14.4) Aritmetica lui Peano admite un model infinit nenumărabil.

(14.5) Teoria completă a numerelor admite un model infinit nenumărabil.

Desigur, (14.4) decurge din (14.5), fiindcă *AP* e inclusă în *Th(MN)*. Teorema (14.5) se demonstrează uşor: *Th(MN)* are un model infinit numărabil, anume *MN*. Prin teorema ascendentă Löwenheim–Skolem, există un model infinit nenumărabil pentru *Th(MN)*. Evident, acest model este *nestandard*. Aşadar,

(14.6) Aritmetica lui Peano are un model nestandard.

Am obţinut astfel o nouă demonstraţie pentru (13.11).

Să trecem acum la teoria mulţimilor *TM*. În *TM* există axioma infinitului, care asigură că există cel puţin o mulţime infinită numărabilă. În *TM* se demonstrează de asemenea teorema lui Cantor, potrivit căreia mulţimea submulţimilor unei mulţimi are un cardinal mai mare decât cardinalul acelei mulţimi. Prin urmare, există cel puţin o mulţime infinită nenumărabilă, anume mulţimea tuturor submulţimilor unei mulţimi infinită numărabilă. Atunci, un *model standard* pentru *TM* este unul al cărui domeniu este infinit nenumărabil.

Aici intervine teorema descendentă Löwenheim–Skolem:

(14.7) Teoria mulţimilor admite un model infinit numărabil.

Demonstraţia e o aplicaţie imediată a teoremei (14.2). Într-adevăr, cum *TM* are un model infinit, va avea, potrivit acestei teoreme şi unul infinit numărabil.

Între interpretarea (modelul) standard şi teorema (14.7) există o tensiune, care constituie ceea ce se numeşte „paradoxul lui Skolem".

Cel de-al doilea context logic în care teoremele Löwenheim–Skolem intervin în mod semnificativ vizează relaţia acestora cu teorema de incompletitudine a lui Gödel. Într-adevăr, teorema (14.6) poate fi demonstrată şi plecând de la teorema de incompletitudine a lui Gödel, în felul următor: Gödel a arătat că aritmetica formală este incompletă. Atunci însă *AP* are două modele care nu sunt elementar echivalente (în unul e adevărată o propoziţie, în altul e adevărată contradictoria acesteia; o atare propoziţie există în mod necesar potrivit incompletitudinii lui *AP*). Apelând la teorema (13.2), înseamnă că cele două modele nu sunt izomorfe. Iar dacă unul este modelul standard al aritmeticii, atunci cu siguranţă celălalt e nestandard, prin urmare (14.6) e adevărată.

§ 15. Teoremele de interpolare şi definibilitate

In paragraful 6 am demonstrat, relativ la logica propoziţională, *teorema de interpolare a lui Craig*. Aşa cum am văzut, aceasta poate fi formulată atât în chip sintactic (apelând la noţiunea de deductibilitate), cât şi semantic (apelând la noţiunea de consecinţă). Teorema de interpolare e valabilă şi pentru logica predicatelor de ordinul întîi. În variantă semantică, ea este următoarea propoziţie:

(15.1) Fie σ şi τ două propoziţii astfel încât $\sigma = \tau$. Atunci există o propoziţie θ astfel încât

a) orice simbol predicativ şi funcţional şi orice constantă individuală care apar în θ apar atât în σ cât şi în τ:

b) $\sigma \models \theta$ şi $\theta \models \tau$.

Pentru logica propoziţională am dat demonstraţia teoremei lui Craig în varianta semantică (teorema (6.2.1)). În acest paragraf nu vom insista însă asupra demonstraţiei lui (15.1). Dar vom demonstra două teoreme care decurg din teorema de interpolare: teorema de consistenţă a lui Robinson şi teorema de definibilitate a lui Beth.

(15.2) *Teorema de consistenţă a lui Robinson.* Fie T_1 şi T_2 două teorii închise. Atunci: teoria $T_1 \cup T_2$ este realizabilă ddacă nu există nici o propoziţie în T_1 a cărei negaţie este în T_2.

Demonstraţie:

1. Suficienţa. Aceasta se demonstrează imediat. Să presupunem, într-adevăr, că $T_1 \cup T_2$ este realizabilă, dar există o propoziţie σ astfel încât $\sigma \in T_1$ şi $-\sigma \in T_2$. Atunci, evident, $T_1 \cup T_2$ este inconsistentă (a se vedea definiţia unei teorii inconsistente). Potrivit teoremei de completitudine (13.5), $T_1 \cup T_2$ nu are nici un model, ceea ce contrazice ipoteza.

2. Necesitatea. Trebuie arătat că dacă nu există nici o propoziţie σ astfel încât $\sigma \in T_1$ şi $-\sigma \in T_2$, atunci $T_1 \cup T_2$ este realizabilă. Aceasta echivalează cu a arăta că dacă $T_1 \cup T_2$ nu este realizabilă, atunci există o propoziţie σ astfel încât $\sigma \in T_1$ şi $-\sigma \in T_2$. Să presupunem că $T_1 \cup T_2$ nu este realizabilă. Prin teorema de completitudine, $T_1 \cup T_2$ nu e consistentă. Există atunci o mulţime finită Σ de propoziţii din $T_1 \cup T_2$ care e inconsistentă. Fie $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ şi $\Sigma_1 \subseteq T_1$ iar $\Sigma_2 \subseteq T_2$. Cum Σ_1 şi Σ_2 sunt finite, există conjuncţia propoziţiilor din Σ_1, respectiv din Σ_2. Să notăm cu σ_1 şi σ_2 aceste propoziţii. Atunci propoziţia

$$\sigma_1 \wedge \sigma_2$$

este inconsistentă, ceea ce înseamnă că

$$\vdash -(\sigma_1 \wedge \sigma_2)$$

adică

$$\vdash \sigma_1 \rightarrow -\sigma_2$$

Aplicând teorema de completitudine a lui Gödel, obţinem

$$\models \sigma_1 \rightarrow -\sigma_2$$

şi de aici

$$\sigma_1 \models -\sigma_2$$

Prin teorema lui Craig, există o propoziţie θ ale cărei simboluri nelogice apar atât în σ_1 cât şi în σ_2, şi

$$\sigma_1 \models \theta \ , \ \theta \models -\sigma_2$$

Cum σ_1 e conjuncţia unor propoziţii din T_1, iar T_1 este o teorie închisă, înseamnă că $\sigma_1 \in T_1$. În θ nu apar decât simboluri care aparţin şi limbajului în care e formulată T_1, iar θ e consecinţa unei propoziţii din T_1. Deci θ e consecinţă a lui T_1 şi, fiindcă T_1 e închisă, deducem că $\theta \in T_1$. Analog, ţinând cont de faptul că $\theta \models -\sigma_2$ şi că, de asemenea, $\theta \models -\sigma_2$ ddacă $\sigma_2 \models -\theta$, deducem că $-\theta \in T_2$ ceea ce contrazice ipoteza iniţială, q.e.d.

Sensul teoremei lui Robinson e următorul. Despre două teorii T_1 şi T_2 avem două modalităţi de a spune că *se contrazic*:

a) sintactic, spunem că T_1 şi T_2 se contrazic când există o propoziţie σ care apare în T_1, dar a cărei negaţie apare în T_2; în acest caz, să spunem că cele două teorii sunt *explicit incompatibile*;

b) semantic, spunem că T_1 şi T_2 se contrazic atunci când ele nu au nici un model în comun. Să spunem în acest caz că cele două teorii sunt *în conflict*.

A fi în conflict e o noţiune semantică; a fi explicit incompatibile e o noţiune sintactică. Teorema lui Robinson afirmă că două teorii stau în primul raport ddacă stau şi în al doilea. Teorema leagă deci cele două noţiuni, asertând că ele au aceeaşi extensiune; sunt coextensionale.

E interesant să notăm următorul lucru: în demonstraţia teoremei lui Robinson s-a folosit teorema de interpolare a lui Craig. Dar se poate proceda şi invers: presupunând că teorema lui Robinson e demonstrată, putem demonstra pe această bază teorema lui Craig, după cum urmează.

Fie σ şi τ două propoziţii astfel încât $\sigma \models \tau$. Fie L_1 limbajul care conţine toate simbolurile nelogice din σ şi L_2 limbajul care conţine toate simbolurile nelogice din τ (şi, deci, din $-\tau$). Fie T_1 mulţimea consecinţelor în L_1 ale lui σ şi T_2 mulţimea consecinţelor în L_2 ale lui $-\tau$. Este evident că $T_1 \cup T_2$ este inconsistentă, fiindcă $-\tau$ aparţine luiT_2 şi deci şi lui $T_1 \cup T_2$. Pe de altă parte, cum $\sigma \models \tau$, înseamnă că $\models \sigma \rightarrow \tau$. Dar $\sigma \in T_1$ şi deci $\tau \in T_1$, aşadar $\tau \in T_1 \cup T_2$, ceea ce face ca $T_1 \cup T_2$ să fie inconsistentă. Potrivit teoremei de completitudine (13.5), $T_1 \cup T_2$ nu este realizabilă. Aplicând acum teorema lui Robinson, înseamnă că există o propoziţie θ astfel încât $\theta \in T_1$ şi $-\theta \in T_2$. Această propoziţie θ trebuie, desigur, să nu conţină decât simboluri nelogice care apar atât în T_1 cât şi în T_2.

Să observăm, mai întîi, că $\theta \in T_1$. Dar T_1 e mulţimea consecinţelor lui σ, deci $\sigma \models \theta$. În al doilea rând, $-\theta \in T_2$. Dar T_2 e mulţimea consecinţelor lui $-\tau$, deci $-\tau \models -\theta$. De aici obţinem

$$\models -\tau \rightarrow -\theta$$
$$\models \theta \rightarrow \tau$$
$$\theta \models \tau$$

ceea ce demonstrează teorema lui Craig.

Să trecem acum la teorema lui Beth. Ca şi cea a lui Robinson, ea leagă o noţiune sintactică de una semantică. În cazul teoremei lui Robinson, cele două noţiuni erau reconstrucţii ale noţiunii intuitive de contrazicere între două teorii. În cazul teoremei lui Beth, noţiunea intuitivă de la care se pleacă e cea de *definibilitate*, prin care se vizează posibilitatea de a defini ceva în funcţie de altceva: e ideea că *într-o teorie un simbol* α *e definibil cu ajutorul altor simboluri* $\beta_1, \ldots \beta_n$. Bunăoară, ne întrebăm:

a) Este definibil în T termenul t cu ajutorul termenilor $t_1, \ldots t_n$?

b) Este definibil în T predicatul P cu ajutorul predicatelor $P_1, \ldots P_m$?

c) Este definibilă în T funcţia F cu ajutorul funcţiilor $F_1, \ldots F_q$?

Se pot formula două reconstrucţii logice ale acestei noţiuni intuitive de definibilitate în T: noţiunea de *definiţie explicită* şi cea de *definiţie implicită*. Pentru a uşura înţelegerea teoremei lui Beth, în continuare vom considera numai cazul (b) în care ceea ce se urmăreşte este să se definească, într-o teorie T, un predicat P cu ajutorul altor predicate $P_1, \ldots P_n$.

Definiţia, aşa cum se observă, este în ambele cazuri relativizată la o teorie; nici explicit, nici implicit P nu e definit în chip absolut, ci numai relativ la o anume teorie. De bună seamă însă că cel care doreşte să aibă o definiţie (explicită sau implicită) absolută va putea proceda în felul următor: va lua teoria T pe care o considerăm ca fiind mulţimea vidă, deci $T = \emptyset$. În acest caz, nu vom mai considera contexte de forma

$$T \vdash \psi$$

ci contexte de forma

$$\vdash \psi$$

deci în care ψ nu mai e deductibilă din T, ci este *tautologie*.

a) Prima reconstrucţie logică a noţiunii de definibilitate a unui predicat P în teoria T este sintactică. O vom numi *definibilitate explicită*. Vom spune că predicatul P n-ar este explicit definibil în T cu ajutorul predicatelor $P_1, \ldots P_m$ ddacă există o formulă φ astfel încât

(i) $T \vdash (\forall\ v_1) \ldots (\forall\ v_n)(P(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow \varphi(v_1, \ldots v_n))$;

(ii) toate variabilele libere din φ se află printre $v_1, \ldots v_n$;

(iii) toate simbolurile nelogice din φ se află printre $P_1, \ldots P_m$.

În acest caz, zicem că φ defineşte explicit predicatul P în T sau că P are o definiţie explicită în T prin φ.

b) A doua reconstrucţie logică a noţiunii de definibilitate a unui predicat P în teoria T este semantică. O vom numi *definibilitate implicită*. Ideea acestui tip de definiţie îi aparţine logicianului italian A. Padoa. Să presupunem că avem un model M al lui T, în care am determinat deja domeniul de obiecte, precum şi extensiunile predicatelor $P_1, \ldots P_m$. Din definibilitatea implicită a lui P prin

P_1, ... P_m. decurge că, în acest caz, în modelul M al lui T şi extensiunea lui P va fi unic determinată.

Cu alte cuvinte, P este definibil implicit în T cu ajutorul predicatelor P_1, ... P_m ddacă oricare ar fi modelele M_1 şi M_2 ale lui T astfel încât

(i) domeniile celor două modele sunt identice, $A_1 = A_2$;

(ii) predicatele P_1, ... P_m au aceeaşi interpretare în ambele modele. Aşadar, dacă

$I_{M_1}(P_1) = R_1 = I_{M_2}(P_1)$, ... $I_{M_1}(P_m) = R_m = I_{M_2}(P_m)$

atunci predicatul P va avea aceeaşi interpretare în ambele modele, în simboluri

$I_{M_1}(P) = R = I_{M_2}(P)$

În acest caz, zicem că P_1, ... P_m definesc implicit în T predicatul P, sau că P are o definiţie implicită în T prin P_1, ... P_m.

Teorema lui Beth leagă cele două noţiuni; ea afirmă că într-o teorie T ele se aplică exact aceloraşi predicate.

(15.3) *Teorema de definibilitate a lui Beth.* Un predicat P este explicit definibil în T ddacă P este implicit definibil în T.

Demonstraţia acestei teoreme va fi formulată într-un mod indirect. Mai întâi, vom demonstra o lemă care va stabili anumite condiţii necesare şi suficiente pentru definibilitatea implicită a lui P în T. Apoi vom arăta că acele condiţii sunt echivalente cu definibilitatea explicită a lui P în T. Motivul pentru care procedăm astfel este acela că, uneori, în formularea teoremei lui Beth se porneşte direct de la condiţiile date în această lemă pentru definibilitatea implicită.

Fie T' o nouă teorie care se obţine din T dacă substituim uniform în orice propoziţie σ a lui T toate simbolurile nelogice care apar în σ, cu excepţia predicatelor P_1, ... P_m, cu alte simboluri de acelaşi tip, adică:

a) ori de câte ori în σ apare o constantă c, substituim uniform pe c cu o nouă constantă c' care nu aparţine limbajului lui T;

b) ori de câte ori în σ apare un predicat n-ar P, îl substituim uniform cu un nou predicat n-ar P', care nu aparţine limbajului lui T;

c) ori de câte ori în σ apare o funcţie n-ară F, o substituim uniform cu o nouă funcţie n-ară F', care nu apare în limbajul lui T.

Aşadar, dacă L este limbajul teoriei T, atunci teoria T' este formulată în limbajul

$L' = \{P_1, \ldots P_m\} \cup \{\alpha' : \alpha$ este un simbol al lui L diferit de $P_1, \ldots P_m\}$

Urmează acum lema menţionată:

(15.4) Un predicat P n-ar este implicit definibil în T cu ajutorul predicatelor P_1, ... P_m ddacă

(I) $T \cup T' \models (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)(P(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \ldots v_n))$

Demonstraţie:

1. Necesitatea. Trebuie să arătăm că dacă (I) e adevărată şi M_1 şi M_2 sunt modele ale lui T cu acelaşi domeniu în care P_1, ... P_m au aceleaşi interpretări,

atunci P are în ambele modele aceeaşi interpretare. Să presupunem deci că (I) e adevărată şi că M_1 şi M_2 sunt două modele ale lui T care au acelaşi domeniu şi în care $P_1, \ldots P_m$ au aceleaşi interpretări. M_1 şi M_2 sunt modele ale lui L. Să construim acum un model, pe care îl vom nota cu $M_1 + M_2$, care e un model al limbajului $L \cup L'$, în felul următor:

a) pentru orice P_i ($i \leq m$), interpretarea acestuia în $M_1 + M_2$ este interpretarea lui P_i în modelul M_1 (sau, ceea ce e acelaşi lucru, în M_2);

b) dacă α este un simbol al lui L, diferit de $P_1, \ldots P_m$, atunci interpretarea lui α în $M_1 + M_2$ este interpretarea lui α în M_1;

c) dacă α este un simbol β' al lui L', diferit de $P_1, \ldots P_m$, atunci interpretarea lui α în $M_1 + M_2$ este interpretarea simbolului β al lui L în M_2;

d) domeniul lui $M_1 + M_2$ este domeniul lui M_1.

Se vede uşor că orice propoziţie σ a lui T este adevărată în modelul $M_1 + M_2$. Apoi, dacă σ' este o propoziţie a lui T', atunci şi aceasta este adevărată în $M_1 + M_2$. Într-adevăr, ea este adevărată în $M_1 + M_2$ ddacă orice şir de obiecte $x_1, \ldots x_n$ din domeniul lui $M_1 + M_2$ satisface pe σ', adică relaţiile corespunzătoare simbolurilor (nelogice) ale lui L' sunt satisfăcute de obiectele din şirul $x_1, \ldots x_n$. Dar acestea sunt satisfăcute ddacă relaţiile corespunzătoare simbolurilor lui L ce apar în propoziţia σ a lui T sunt satisfăcute de obiectele $x_1, \ldots x_n$ în M_2. Or, cum M_2 e model al lui T şi are tot domeniul A al lui M_1, acest lucru se întâmplă. Deci $M_1 + M_2$ este model pentru orice propoziţie din T' şi, astfel, e un model pentru T'. Conchidem de aici că $M_1 + M_2$ e model pentru $T \cup T'$.

Cum (I) e adevărată, înseamnă că

$$M_1 + M_2 \models (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)(P(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \ldots v_n))$$

Aşadar, interpretarea lui P în $M_1 + M_2$ este identică cu interpretarea lui P' în $M_1 + M_2$. Dar interpretarea lui P în $M_1 + M_2$ este interpretarea lui P în M_1, iar interpretarea lui P' în $M_1 + M_2$ este interpretarea lui P în M_2. Aşadar, P are aceeaşi interpretare în ambele modele M_1 şi M_2, q.e.d.

2. Suficienţa. Presupunem că P este implicit definibil în T cu ajutorul predicatelor $P_1, \ldots P_m$ şi fie M un model oarecare al teoriei $T \cup T'$. Să arătăm că M este model şi pentru propoziţia $(\forall v_1)\ldots(\forall v_n)(P(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \ldots v_n))$. Modelul M este un model de forma $M_1 + M_2$, iar modelele M_1 şi M_2: a) au acelaşi domeniu; b) în ambele, predicatele $P_1, \ldots P_m$ au aceeaşi interpretare. Întrucât $P_1, \ldots P_m$ definesc implicit în T predicatul P, înseamnă că în ambele modele P are aceeaşi interpretare. Dar interpretarea lui P' în modelul $M_1 + M_2 = M$ este interpretarea lui P în M_2 care e aceeaşi cu interpretarea lui P în M_1 şi care e deci aceeaşi cu interpretarea lui P în $M_1 + M_2 = M$. Aşadar, propoziţia

$$(\forall v_1) \ldots (\forall v_n)(P(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \ldots v_n))$$

e adevărată în M.

Să notăm următoarea consecinţă a construcţiei modelelor de tipul lui $M_1 + M_2$. Fie σ o propoziţie a lui T. Există atunci o propoziţie σ' a lui T'. Am văzut că σ e adevărată în $M_1 + M_2$ ddacă σ' e adevărată în modelul $M_1 + M_2$. Cum $M_1 + M_2$ este un model oarecare al limbajului teoriei $T \cup T'$, înseamnă că, de fapt, ceea ce s-a demonstrat este că

(15.5) Pentru orice model M al limbajului $L \cup L'$, M este un model pentru σ ddacă M este un model pentru σ', în simboluri

$\sigma = | \models \sigma'$

Cu aceasta, putem trece la demonstrarea teoremei lui Beth. Ea revine la a arăta că

(15.6) $T \vdash (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)(P(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow \varphi(v_1, \ldots v_n))$ ddacă

$T \cup T' \models (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)(P(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \ldots v_n))$

1. *Definibilitatea explicită implică definibilitatea implicită.* Aceasta e acum condiţia de suficienţă din (15.6). Să presupunem că P este explicit definibil în T, deci că

$T \vdash (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)(P(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow \varphi(v_1, \ldots v_n))$

Conform definiţiei lui T' şi ţinând seamă că simbolurile nelogice care apar în φ sunt printre $P_1, \ldots P_m$, avem:

$T' \vdash (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)(P'(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow \varphi(v_1, \ldots v_n))$

de unde se obţine

$T \cup T' \vdash (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)(P(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow \varphi(v_1, \ldots v_n))$

$T \cup T' \vdash (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)(P'(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow \varphi(v_1, \ldots v_n))$

De aici decurge imediat că

$T \cup T'' \vdash (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)(P(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \ldots v_n))$

şi prin teorema de complititudine (13.5) avem

$T \cup T' \models (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)P(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \ldots v_n))$

2. *Definibilitatea implicită implică definibilitatea explicită.* Aceasta este condiţia de necesitate din (15.6). Să presupunem deci că

$T \cup T' \models (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)\ P(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow P'(v_1, \ldots v_n))$

Să ne reamintim că $T \cup T'$ e formulată în limbajul $L \cup L'$. Să construim acum un alt limbaj $L'' = L \cup L' \cup \{c_1, \ldots c_n\}$, unde c_n sunt noi constante individuale. Din supoziţia făcută decurge imediat că

$T \cup T' \models P\ (c_1, \ldots c_n) \leftrightarrow P'(c_1, \ldots c_n)$

Prin teorema de compactitate, înseamnă că există o submulţime finită Σ a lui $T \cup T'$ astfel încât

$\Sigma \models P(c_1, \ldots c_n) \leftrightarrow P'(c_1, \ldots c_n)$

Propoziţiile din Σ aparţin fie lui T, fie lui T'. Deci $\Sigma = \Delta \cup \Delta'$, unde $\Delta \subseteq T$ şi $\Delta' \subseteq T'$. Să notăm cu σ conjuncţia propoziţiilor din Δ şi cu σ' conjuncţia

propoziţiilor din Δ'. Avem deci

$\sigma \wedge \sigma' \models P(c_1, \ldots c_n) \leftrightarrow P'(c_1, \ldots c_n)$

De aici obţinem prin logica propoziţiilor

(1) $\sigma \wedge P(c_1, \ldots c_n) \models \sigma' \rightarrow P'(c_1, \ldots c_n)$

Trebuie să observăm că $\sigma \wedge P(c_1, \ldots c_n)$ şi $\sigma' \rightarrow P'(c_1, \ldots c_n)$ sunt propoziţii ale lui L' care nu au în comun ca simboluri nelogice decât constantele $c_1, \ldots c_n$ şi predicate aflate printre $P_1, \ldots P_m$. Aplicând teorema lui Craig, înseamnă că există o formulă $\theta(c_1, \ldots c_n)$ în care toate simbolurile nelogice sunt printre cele comune lui $\sigma \wedge P(c_1, \ldots c_n)$ şi $\sigma' \rightarrow P'(c_1, \ldots c_n)$ şi, de asemenea,

(2) $\sigma \wedge P(c_1, \ldots c_n) \models \theta(c_1, \ldots c_n)$

(3) $\theta(c_1, \ldots c_n) \models \sigma' \rightarrow P'(c_1, \ldots c_n)$

Ţinând seamă de propoziţia (15.5), aplicată propoziţiei $\sigma \rightarrow P(c_1, \ldots c_n)$ cu ajutorul lui (3) obţinem pe:

(4) $\theta(c_1, \ldots c_n) \models \sigma \rightarrow P(c_1, \ldots c_n)$

Cu ajutorul teoremei de completitudine, aplicată propoziţiilor (2) şi (4), vom avea

(5) $\sigma \wedge P(c_1, \ldots c_n) \vdash \theta(c_1, \ldots c_n)$

(6) $\theta(c_1, \ldots c_n) \vdash \sigma \rightarrow P(c_1, \ldots c_n)$

teorema deducţiei permite să se deducă din aceste două propoziţii

(7) $\vdash (\sigma \wedge P(c_1, \ldots c_n)) \rightarrow \theta(c_1, \ldots c_n)$

(8) $\models \theta(c_1, \ldots c_n) \rightarrow (\sigma \rightarrow P(c_1, \ldots c_n))$

Să observăm că următoarea expresie este tautologie a logicii de ordinul întâi a predicatelor:

(9) $\vdash (\varphi \wedge \psi \rightarrow \chi) \rightarrow ((\chi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \leftrightarrow \chi)))$

Va fi aşadar tautologie şi

(10) $\vdash (((\sigma \wedge P(c_1, \ldots c_n)) \rightarrow \theta(c_1, \ldots c_n)) \rightarrow ((\theta(c_1, \ldots c_n) \rightarrow (\sigma \rightarrow P(c_1, \ldots c_n))) \rightarrow (\sigma \rightarrow (P(c_1, \ldots c_n) \leftrightarrow \theta(c_1, \ldots c_n))))$

Aplicând de două ori regula modus ponens (se folosesc propoziţiile (7), (8) şi (10)), decurge că

(11) $\vdash \sigma \rightarrow (P(c_1, \ldots c_n) \leftrightarrow \theta(c_1, \ldots c_n))$

Iarăşi prin teorema deducţiei, avem

(12) $\sigma \vdash P(c_1, \ldots c_n) \leftrightarrow \theta(c_1, \ldots c_n)$

În propoziţia σ apar numai simboluri din L, deci în nici un caz nu apar constantele $c_1, \ldots c_n$. Aşadar din (12) putem conchide

(13) $\theta \vdash (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)(P'(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow \theta(v_1, \ldots v_n))$

Prin teorema de completitudine se obţine

(14) $\sigma \models (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)(P'(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow \theta(v_1, \ldots v_n))$

Dar $\sigma \in T$ şi deci dacă M e model al lui T, atunci M este model şi al lui σ. Prin urmare, (14) conduce la

(15) $T \models (\forall v_1) \ldots (\forall v_n)\ (P(v_1, \ldots v_n) \leftrightarrow \theta(v_1, \ldots v_n))$

ceea ce, luând pe φ ca θ, probează teorema lui Beth, q.e.d.

§ 16. Caracterizarea logicii de ordinul întâi a predicatelor

Cercetarea logicii de ordinul întâi, întreprinsă în paragrafele anterioare, a condus la evidenţierea unor proprietăţi remarcabile ale acesteia, precum teoremele de completitudine şi compactitate, teorema lui Craig sau a lui Beth. Este acum momentul să încercăm să formulăm o caracterizare mai precisă a acestui instrument.

La o primă vedere, logica de ordinul întâi se poate caracteriza ca o teorie având ca obiect de studiu *constantele* sau *conceptele logice: şi, nu, sau, dacă... atunci, există un, oricare* etc. Într-o atare perspectivă, logica de ordinul întâi va fi caracterizată printr-un ansamblu de propoziţii care formulează proprietăţile conceptelor logice. Dacă, de pildă, primim lucrurile într-o perspectivă semantică, ea va fi caracterizată prin colecţia tuturor propoziţiilor valide.

Această teorie are o putere expresivă foarte mare. Cel puţin trei contexte sunt extrem de relevante în acest sens:

1) În contextul programului lui Hilbert în fundamentele matematicii, ea a dobândit o semnificaţie aparte. Una dintre supoziţiile acestui program – ceea ce s-a numit *teza lui Hilbert* – era următoarea: toate propoziţiile matematicii pot fi exprimate în logica de ordinul întâi, iar noţiunea informală de demonstraţie, folosită în matematică, poate fi redată prin noţiunea formală de demonstraţie în logica de ordinul întâi.

Cea de a doua parte a tezei lui Hilbert este sprijinită de teorema de completitudine a lui Gödel: ea arată că noţiunea de demonstraţie, descrisă în logica întâi – în simboluri, relaţia $\Sigma \vdash \varphi$ – este coextensivă cu noţiunea de consecinţă logică: φ e o consecinţă a lui Σ, în simboluri $\Sigma \models \varphi$. Relaţia semantică de consecinţă capturează – prin invocarea modelelor (= a structurilor) studiate de matematicieni – noţiunea informală de demonstraţie. Prima parte a tezei lui Hilbert are un caracter empiric: acceptabilitatea ei decurge din dovada că teorii foarte importante ale matematicii pot fi formalizate în cadrele logicii de ordinul întâi. Aici intervine cel de-al doilea context:

2) În logica de ordinul întâi s-a reuşit formalizarea unor teorii matematice remarcabile, precum teoria mulţimilor a lui Zermelo-Fraenkel sau aritmetica lui Peano.

3) Un alt context favorabil logicii de ordinul întâi este acela că în prima parte a secolului nostru în filosofia ştiinţei a dominat o perspectivă nominalistă. „Majoritatea raţionamentelor logice – scria Quine – se desfăşoară la un nivel care nu presupune entităţi abstracte. În atari raţionamente se pune la lucru de cele mai multe ori teoria cuantificării, ale cărei legi pot fi formulate prin scheme care nu solicită cuantificarea asupra variabilelor pentru clase. O mare parte din ceea ce se formulează de obicei în termeni de clase, relaţii sau chiar numere se poate reformula uşor ca scheme în teoria cuantificării plus, probabil, teoria identităţii"[1].

Argumentul lui Quine poate fi redat prin două teze:

a) În logica de ordinul întâi („teoria cuantificării", cum îi spune el), cuantificatorii leagă numai variabile individuale, care iau deci ca valori obiecte individuale; nu există cuantificatori care leagă variabile ale căror valori sunt colecţii de obiecte („clase"), colecţii de perechi ordonate de obiecte, în general de *n*-tuple de obiecte („relaţii") sau numere (care la rândul lor sunt clase).

b) Aceste mijloace ale logicii de ordinul întâi sunt capabile să formalizeze o mare parte a matematicii (cf. şi cel de-al doilea context menţionat mai sus).

Pentru Quine, relativ la acceptarea unui limbaj, noi suntem angajaţi ontologic faţă de anumite genuri de entităţi: potrivit celebrului său criteriu de angajare ontologică, *a fi înseamnă a fi valoare a unei variabile ce poate fi legată.* Dacă se cuantifică asupra unor variabile care iau ca valori obiecte, înseamnă că acceptăm (relativ la limbajul respectiv) obiecte în ontologia noastră; dacă se cuantifică asupra unor variabile care iau ca valori numere (sau clase), înseamnă că acceptăm numere (respectiv clase) în ontologie. Logica de ordinul întâi e „nominalistă" în acest sens; ea ne angajează ontologic numai faţă de obiecte individuale, nu şi faţă de alte entităţi (faţă de entităţi abstracte, în special, cum ar fi clasele, relaţiile sau numerele).

Aceste argumente în favoarea logicii de ordinul întâi au alimentat teza că *logica este logica de ordinul întâi*; orice cade în afara acestei logici nu este de natură logică. O atare teză implică mai multe propoziţii. Printre ele se află şi următoarele:

A. Există o distincţie clară între conceptele logice (şi, nu, sau, oricare etc.) şi conceptele nelogice. Concepte precum cele de infinit, de clasă, de număr sunt concepte din afara logicii. Desigur, e clar că unele dintre acestea nu sunt concepte logice (cel de număr, în particular de număr real, de pildă). problema este însă, pe de o parte, că nu e limpede dacă distincţia dintre cele două tipuri de concepte a atât de fermă. Pe de altă parte, această teză nu se întemeiază pe

[1] W. Quine, *From a Logical Point of View*, p. 116.

o concepţie clară cu privire la natura conceptelor logice: ce le face să fie logice şi să difere de cele ne-logice?

B. Se presupune că toate conceptele ne-logice se supun aceleiaşi logici. Logica este insensibilă la materia căreia i se aplică. Oricărui sistem i s-ar aplica, logica va consta în aceleaşi principii de raţionament. Când întrebăm: „Care e logica acestui concept matematic particular?", întrebarea nu vizează decât descrierea felului în care logica i se aplică acestuia, nicidecum faptul că logica lui ar fi diferită de logica altui concept matematic. Când spunem: „Îmi scapă logica acestui concept", ceea ce vrem să afirmăm e că nu e clar cum o anumită concluzie decurge din anumite premise (care încorporează principii privitoare la acel concept), nu că acest concept ar avea o logică a lui.

O atare perspectivă asupra logicii de ordinul întâi poate fi supusă însă unor obiecţii. Obiecţiile vizează atât contextele (1) – (3), cât şi presupoziţiile (A) şi (B).

În răspărul tezei lui Hilbert, s-a argumentat că noţiuni foarte importante din matematică nu pot fi formalizate în logica de ordinul întâi; în această situaţie se află noţiuni din teoria mulţimilor *(mulţime infinită; mulţime numărabilă)*, din analiză *(mulţime de măsură zero)*, din topologie *(mulţime deschisă; funcţie continuă)*, din teoria probabilităţii *(variabilă aleatoare)* etc., care sunt centrale în matematică. Să luăm un exemplu foarte simplu, pentru a vedea cum noţiuni chiar mai puţin complexe nu pot fi prinse de logica de ordinul întâi.

Teoria grupurilor G se formulează într-un limbaj $L = \{0, +\}$, unde 0 este o constantă individuală, iar + este o constantă funcţională binară.

Teoria grupurilor are următoarele axiome:

G1. $(\forall v_1)(\forall v_2)(\forall v_3)((v_1 + (v_2 + v_3)) = ((v_1 + v_2) + v_3))$ (asociativitatea)

G2. $(\forall v)((v + 0) = v; (\forall v)((0 + v) = v)$ (element neutru)

G3. $(\forall v_1)(\exists v_2)((v_1 + v_2 = 0; (v_2 + v_1) = 0)$ (existenţa inversului)

Un model pentru această teorie este de forma $<G, 0, +>$, unde G e o mulţime de obiecte, 0 e un obiect din G, iar + e o funcţie binară pe G. Un astfel de model este numit grup. Să luăm două exemple:

a) G este mulţimea numerelor naturale: 0 este numărul 0, iar + este adunarea obişnuită între numerele naturale.

b) G şi 0 sunt ca mai sus, dar + se defineşte astfel: dacă x şi y sunt două numere, atunci $x + y$ este restul împărţirii la 5 a adunării lui x cu y. De pildă, vom avea în acest caz: $7 + 5 = 2$, iar $6 + 4 = 0$.

Teoria grupurilor abeliene (sau comutative) GA se obţine adăugând lui G axioma

G4. $(\forall v_1)(\forall v_2)((v_1 + v_2) = (v_2 + v_1))$

Ambele grupuri luate ca exemplu mai sus sunt abeliene, aşa cum se poate vedea cu uşurinţă.

Să notăm acum cu nx ($n \geq 1$) expresia $x + (x + \ldots (x + x) \ldots)$, de n ori. De pildă $1x$ este x; $2x$ este $x + x$; $3x$ este $x + (x + x)$ etc. Fie $x = 4$. Atunci în primul exemplu de grup avem $1x = 4$; $2x = 4 + 4 = 8$; $3x = 4 + (4 + 4) = 4 + 8 = 12$ etc.

Teoria grupurilor abeliene periodice GAP rezultă adăugând lui GA axioma

G5. $(\forall\ v)\ (\exists\ n)\ (nv = 0)$

Cel de-al doilea grup luat ca exemplu este periodic. Într-adevăr, să observăm că dacă interpretarea lui v e un număr oarecare x, atunci

$$x + (x + (x + (x + x)) = 0$$

deci pentru $n = 5$ axioma G5 devine adevărată.

Primul grup luat ca exemplu nu e însă periodic.

Problema este însă alta: axioma (G5) *nu* este o formulă a logicii de ordinul întâi; din acest motiv, GAP nu este o teorie ce poate fi formulată în logica de ordinul întâi. Că este aşa se vede imediat în felul următor: în limbajul L al teoriei GAP nu există simboluri corespunzătoare noţiunilor aritmetice (0 şi + *nu* sunt simboluri aritmetice, deşi în unele modele pot fi interpretate – precum în cele două exemple ale noastre – aritmetic!). În al doilea rând, în formalizarea lui L, nu s-au introdus variabile care iau ca valori numere. Ţinând seamă că nx e numai o prescurtare, formula (G5) este, de fapt o prescurtare pentru:

$$(16.1)\ (\forall\ v)\ (v = 0 \vee (v + v = 0 \vee (v + (v + v)) = 0 \vee \ldots (v + (v + \ldots (v + v) \ldots) \vee \ldots)$$

Dar (16.1) nu e o formulă a logicii de ordinul întâi, fiindcă este un şir *infinit* de simboluri ale lui L, ceea ce nu e permis.

Iată deci cum o teorie algebrică extrem de simplă nu poate fi formalizată în logica predicatelor de ordinul întâi. La cele spuse aici s-ar putea însă obiecta în felul următor: să presupunem că limbajul în care e formalizată GAP e mai larg şi cuprinde o formalizare a aritmeticii. Atunci putem cuantifica asupra variabilelor care iau ca valori numere şi, deci, (G5) e formulă a logicii de ordinul întâi. Astfel, teza lui Hilbert e păstrată. Problema cu o sugestie precum aceasta e următoarea: se admite că teoria grupurilor *presupune* teoria numerelor. Or, aceasta nu e în spiritul algebrei moderne. Altfel zis, o atare ipoteză nu e în acord cu practica matematică.

O altă obiecţie la adresa tezei lui Hilbert vine din existenţa modelelor neintenţionate pentru teoriile de ordinul întâi. Cum am văzut, teoria numerelor are modele infinit nenumărabile, iar teoria mulţimilor şi teoria numerelor reale au modele infinit numărabile. Teorema Löwenheim-Skolem, cea ascendentă şi cea descendentă, care produc această situaţie, arată că noţiunile complementare

de *numărabil* şi *nenumărabil* nu pot fi definite în logica de ordinul întâi. Dar această situaţie nu este în concordanţă cu practica matematică; în analiza matematică mulţimea nenumărabilă (continuă) a numerelor reale este luată ca bază.

Teorema de compactitate, la rândul ei, dovedeşte că noţiunile de finit şi de infinit nu pot fi capturate în logica de ordinul întâi. Şi iarăşi practica matematică este încălcată, căci algebriştii iau noţiunea de *finit* ca punct de pornire.

Exemplele date indică şi altceva: în contexte diferite deranjează proprietăţi diferite ale logicii de ordinul întâi: în exemplu relativ la teoria grupurilor era deplânsă imposibilitatea de a avea expresii infinit de lungi; în cel relativ la numerele reale era deplânsă existenţa modelelor numărabile ale teoriilor de ordinul întâi etc.

Ar decurge de aici că logicile cărora li se supun diverse concepte sunt diferite: cele din analiză au o logică în care teorema descendentă Löwenheim-Skolem nu este valabilă; cele din algebră impun o logică în care teorema de compactitate să fie încălcată. Aşadar, punctul (B) de mai sus se dovedeşte a fi nerealist. Desigur că din sugestia că logica de ordinul întâi trebuie abandonată nu rezultă *ce* logică să îi fie pusă în loc, în fiecare context particular. Care e logica care să poată da seamă de conceptele de finit şi de infinit? Răspunsul nu este prea uşor de dat, cum vom vedea de altfel şi din exemplele de mai jos.

Cea mai simplă metodă de a produce o nouă logică este aceea de a formula o extindere a logicii de ordinul întâi. Logica predicatelor de ordinul întâi apare în această perspectivă ca *logica standard.* Celelalte sisteme logice au, acum, semnificaţia unor alternative – sau, precum în cazul exemplelor pe care le vom discuta mai jos, pe cea a unor extinderi ale ei.

I. *Cuantificatori generalizaţi.* Ideea acestei extinderi este de a introduce noi cuantificatori, alături de cei obişnuiţi, $\forall$ şi $\exists$, pentru a elimina unele din carenţele menţionate ale logicii de ordinul întâi. Primul care a mers pe acest drum a fost Mostowski. Plecând de la faptul că noţiuni atât de importante în matematici precum cele de *finit, numărabil* nu sunt definibile în logica de ordinul întâi, el a propus să încercăm să captăm aceste noţiuni în mod direct, cu ajutorul unor noi cuantificatori. Sintactic, strategia lui constă în a modifica regulile de formare a formulelor, adăugând regula:

(16.2) Dacă φ este o formulă, atunci $(Qv)\varphi$ este o formulă.

Înţelesul lui Q depinde de regula semantică adoptată. De pildă, s-ar putea formula regula:

(16.3.1) $M \models (Qv)\varphi$ (v) ddacă există cel puţin un număr infinit numărabil de obiecte x astfel încât $M \models \varphi(v)$ $((x))$.

Aşadar, (16.3.1) spune că propoziţia $(Qv)\varphi(v)$ e adevărată în modelul M ddacă φ e satisfăcută în M de cel puţin un număr *infinit numărabil* de obiecte;

şi nu e adevărată dacă e satisfăcută în M de un număr finit de obiecte. Logica $L(Q0)$ formulată aici reuşeşte să traseze diferenţa între finit şi infinit, ceea ce am văzut că este extrem de important în anumite contexte. Bunăoară, astfel putem spune că există infinit de multe numere naturale. Pentru aceasta, să admitem că dacă φ e o formulă a AP, atunci şi $(Qv)\varphi$ e o formulă a AP. Să ne amintim, de asemenea, că în acest limbaj se defineşte relaţia <:

$$v < v' = df(\exists\, v'')\ ((v + Sv'') = v')$$

În logica L(Q0), construită pe baza regulilor (16.2) şi (16.3.1), vom avea:

$$AP \vdash (Qv)\ (0 < v)$$

adică: numerele naturale sunt cel puţin infinit numărabile.

De asemenea, am putea construi o logică L(Q1) care să permită distincţia dintre numărabil şi nenumărabil, înlocuind pe (16.3.1) cu

(16.3.2) $M \models (Qv)\varphi(v)$ ddacă există cel puţin un număr infinit nenumărabil de obiecte x în A astfel încât

$$M \models \varphi(v)\ ((x))$$

În noua logică se pot defini modele infinit nenumărabile (dé pildă, modelul standard pentru numerele reale) etc.

Logici precum L(Q0) şi L(Q1) pun cel puţin două probleme importante:

a) Dacă se acceptă ca *naturale* astfel de extinderi ale logicii de ordinul întâi, înseamnă că, implicit, propoziţia (A) de mai sus este abandonată. Potrivit lui (A), există o distincţie clară între conceptele logice şi conceptele ne-logice. Dar o logică precum L(Q0) se bazează pe o supoziţie diferită: conceptul de infinit numărabil este logic, odată ce el este încorporat direct în condiţia semantică (16.3.1); la rândul ei, L(Q1) conduce la concluzia că, fiind la rândul lui încorporat direct în (16.3.2), conceptul de infinit nenumărabil este logic. Aşadar, mişcarea către extinderi ale logicii de ordinul întâi e, în acelaşi timp, o punere sub semnul întrebării a propoziţiei (A).

b) Ce proprietăţi structurale au L(Q0) şi L(Q1)? De pildă, în logica L(Q0) nu se poate demonstra teorema de compactitate. În L(Q0) cad, de asemenea, teorema de interpolare a lui Craig şi cea de definibilitate a lui Beth.

Într-adevăr, să luăm teorema lui Beth. Ea spunea că o noţiune sintactică – definibilitatea explicită – este coexistentă cu o noţiune semantică – definibilitatea implicită. Dar în cazul lui L(Q0), sintaxa este finită, şi deci o mulţime infinită nu este definibilă explicit; în schimb, condiţia semantică (16.3.1) permite să definim implicit mulţimi infinibile. Ca urmare, teorema lui Beth cade şi, odată cu ea, cade şi cea a lui Craig a cărei consecinţă este.

Morala ce poate fi extrasă de aici e următoarea: dacă vrem o logică în care noţiunile de finit şi de infinit să poată fi exprimate, şi dacă în plus vrem ca această logică să păstreze teorema de definibilitate a lui Beth, atunci trebuie

ca sintaxa însăşi să fie, într-un sens, infinită. Cum se poate acest lucru vom vedea cu ajutorul exemplului următor:

Să observăm însă mai întâi că în logica de ordinul întâi, datorită teoremei descendente Löwenheim–Skolem, cuantificatorul: există nenumărabil de mulţi... nu este definibil. Însă dacă se construieşte logica $L(Q1)$ acesta e definibil implicit. În $L(Q1)$ teorema lui Beth cade, şi cade de asemenea teorema descendentă Löwenheim–Skolem.

II. *Logici infinitare.* Logici precum $L(Q0)$ au o putere expresivă redusă: ele nu permit distincţii fine, ci doar pe cele care vizează cardinalitatea unei mulţimi. În plus, am văzut că ele nu mai permit demonstrarea unor teoreme extrem de importante. O altă strategie de a extinde logica de ordinul întâi se concentrează asupra sintaxei: se acceptă formule infinit de lungi. Lucrul acesta se poate face în două feluri:

a) se acceptă conjuncţii şi disjuncţii infinite;

b) se acceptă un număr infinit de cuantificatori în faţa unei formule.

Pentru a evidenţia clar cum se procedează, logicile nou construite sunt notate astfel: $L(\kappa, \lambda)$, unde κ arată că în această logică se admit conjuncţii şi disjuncţii de lungime mai mică decât κ, iar λ arată că se admit şiruri de cuantificatori de lungime mai mică decât λ. De pildă, logica obişnuită, de ordinul întâi, este o logică $L(\omega, \omega)$, fiindcă: a) se admit conjuncţii şi disjuncţii mai mici decât ω, deci finite; şi b) se admit doar şiruri mai mici decât ω de cuantificatori, deci tot finite.

Logica $L(\omega_1, \omega)$ permite conjuncţii şi disjuncţii infinit numărabil de lungi. În ea (16.1) este formulă. Sau, un alt exemplu: este formulă în limbajul aritmeticii lui Peano (formalizat în această logică!) expresia

(16.4) $(\forall\ v)\ (v = 0 \vee v = 1 \vee v = 2 \vee \ldots)$

care spune că orice obiect este un număr natural.

Este interesant să subliniem aici următorul fapt: în logica $L(\omega_1, \omega_1)$ se poate defini cuantificatorul: există infinit (numărabil) de mulţi...; prin urmare, $L(\omega_1, \omega_1)$ include logica $L(Q0)$. Într-adevăr, faptul că infinit (numărabil) de multe obiecte au proprietatea P poate fi exprimat prin formula:

(16.5.1) $(\exists\ v)\ P(v) \cdot (\forall\ v)(\exists\ v')(P(v) \cdot P(v') \cdot v \neq v') \cdot$
$(\forall\ v)(\forall\ v')(\exists\ v'')\ (P(v) \cdot P(v') \cdot P(v') \cdot v \neq v' \cdot v \neq v' \cdot v' \neq v')\ldots$

Definirea cuantificatorului: *există infinit de mulţi* este realizată cu mijloace sintactice. Apelând la modelele canonice, rezultă că acest cuantificator se defineşte şi implicit. Ca urmare, în $L(\omega_1, \omega_1)$ teorema lui Beth este demonstrabilă. Dar cea de compactitate cade.

III. *Logica de ordinul doi.* Probabil că aceasta este cea mai naturală extindere a logicii de ordinul întâi. Construirea ei a urmărit să elimine unele carenţe neplăcute ale logicii de ordinul întâi. În aceasta, de pildă, e imposibil să se formuleze o susţinere de felul: fie f o funcţie oarecare cu proprietatea că este crescătoare (sau continuă, monotonă etc.), deşi putem spune: fie x un obiect oarecare care satisface proprietatea P. Apoi, în logica de ordinul întâi nu e posibil să se formuleze propoziţii de felul: există o funcţie identitate; ori: obiectele x şi y au o proprietate în comun; ori: dacă obiectele x şi z sunt identice, atunci au aceleaşi proprietăţi. Putem însă identifica o anumită funcţie ca funcţie identitate: când $(\forall\ v)\ (f(v) = v)$; de asemenea, putem să afirmăm, pentru orice formulă φ în parte, că

$$(c = c') \rightarrow (\varphi(c) \leftrightarrow \varphi(c'))$$

Logica de ordinul doi este un mijloc de a exprima astfel de susţineri. În acest scop, e nevoie să putem cuantifica asupra unor variabile care iau ca valori nu obiecte, ci alte feluri de entităţi: funcţii, predicate, propoziţii etc. Prin urmare, pentru a produce o logică de ordinul doi, e nevoie:

a) să se introducă variabile de funcţii, de predicate, de propoziţii;

b) să se extindă ideea de formulă, pentru a permite cuantificări asupra acestor noi variabile;

c) să se definească într-un sens care să cuprindă şi noile variabile, noţiuni ca cele de variabilă liberă şi legată, de propoziţie şi formulă de ordinul doi etc.

De pildă, fie x, y, variabile pentru predicate unare. Atunci $x(c)$ este o formulă de ordinul doi, în care apare (liberă) variabila predicativă x; $(\exists\ x)x(c)$ este o propoziţie de ordinul doi, adică o formulă de ordinul doi în care nici o variabilă de ordinul doi nu apare liberă.

Putem să combinăm cuantificări asupra unor variabile individuale cu cuantificări asupra unor variabile de ordinul doi. Astfel, propoziţia de ordinul doi:

$$(\exists\ x)(\forall\ v)(x(v) = v)$$

afirmă că există o funcţie identitate; propoziţia

$$(\forall\ v)(\forall\ v')(\exists\ x)(x(v) \cdot x(v'))$$

spune că oricare două obiecte au cel puţin o proprietate în comun. Interesant este că în această logică putem formula principiile de identitate ale lui Leibniz:

(16.6.1) *Principiul identităţii indiscernobililor*: $(\forall\ v)(\forall\ v')((\forall\ X)(X(v) \leftrightarrow X(v')) \rightarrow v = v')$

(dacă două obiecte au aceleaşi proprietăţi, atunci ele sunt identice) şi

(16.6.2) *Principiul indiscernabilităţii identicilor:*

$$(\forall\ v)(\forall\ v')(v = v' \rightarrow (\forall\ X)(X(v) \leftrightarrow X(v'))$$

(dacă două obiecte sunt identice, atunci au aceleaşi proprietăţi).

Un alt exemplu este următorul: în logica de ordinul întâi aritmetica lui Peano am văzut că poate fi axiomatizată cu ajutorul a şase axiome (12.12 a–f) şi al unei scheme axiomatice (12.12 g) – principiul inducţiei. Prin urmare, *AP* are o infinitate de axiome, căci principiul inducţiei furnizează câte o axiomă pentru fiecare instanţă a sa; iar aceste instanţe sunt infinite ca număr. Însă în logica de ordinul doi *AP* este finit axiomatizabilă, fiindcă schema axiomatică a inducţiei poate fi înlocuită cu o singură axiomă (care e o propoziţie de ordinul doi), anume:

(16.7) $(\forall X)((X(0) \cdot (\forall v)(X(v) \leftrightarrow X(Sv))) \rightarrow (\forall v)\, X(v))$

(aici X este o variabilă predicativă). Teoria de ordinul doi care are ca axiome propoziţiile (12.12 a–f) şi (16.7) se numeşte aritmetica (lui Peano) de ordinul doi.

Aceste exemple arată că logica de ordinul doi are o putere mai mare decât cea de ordinul întâi în a exprima diverse susţineri.

Capitolul de faţă ne-a pus în faţa unor teoreme importante asupra logicii de ordinul întâi: teoremele de compactitate, de completitudine, Löwenheim-Skolem, Craig etc. Sunt acestea valabile relativ la logica de ordinul doi? Aşa cum vom vedea imediat,

a) teorema descendentă Löwenheim-Skolem nu e valabilă;

b) teorema de compactitate nu este valabilă;

c) teorema de completitudine nu este valabilă.

Aceste rezultate arată că semantica logicii de ordinul doi este mai „sălbatică" decât cea, domesticită, a logicii de ordinul întâi. Ele au constituit, de altfel, unul dintre motivele pentru care această logică a fost mult timp mai puţin cercetată.

Pentru a vedea cum se pot proba rezultatele (a)–(c), e nevoie de anumite consideraţii semantice. În particular, e nevoie să extindem noţiunea de *satisfacere* a unei formule pentru a acoperi cazul când avem a face cu variabile de ordinul doi. Pentru a simplifica lucrurile, în continuare vom nota cu u, u_1, u_2 variabile funcţionale, iar cu X, Y, X_1... variabile predicative. Atunci vom avea:

(16.8.1) Fie u o variabilă funcţională n-ară. Atunci: $M \models (\forall u)\, \varphi(u)$ ddacă pentru orice funcţie n-ară f definită pe A^n (unde A este domeniul lui M) şi cu valori în A, avem: $M \models \varphi((f))$.

(16.8.2) Fie x o varibilă predicativă n-ară. Atunci: $M \models (\forall x)\, \varphi(x)$ ddacă pentru orice relaţie n-ară R pe A avem: $M \models \varphi((R))$.

Vom arăta acum că în logica de ordinul doi teorema descendentă Löwenheim-Skolem cade. Această teoremă spune că dacă o formulă φ este adevărată într-un model infinit, atunci e adevărată şi într-un model infinit numărabil. Demonstraţia va reveni atunci la a arăta că:

(16.9) Există o propoziţie φ de ordinul doi care are un model infinit nenumărabil, dar φ este falsă în orice model infinit numărabil.

Dacă avem o astfel de propoziţie φ, înseamnă că în orice model infinit numărabil, – φ este adevărată. Prin urmare, e suficient să construim o propoziţie de ordinul doi $\psi = -\varphi$ care e adevărată într-un model ddacă acesta este infinit numărabil. Ne vom raporta la limbajul L_{AP} al aritmeticii lui Peano. Vom lua drept ψ propoziţia

$(\exists\ u)(\forall\ X)((X0) \cdot (\forall\ v')(X(v') \rightarrow X(u(v'))) \rightarrow (\forall\ v')\ X(v'))$

Demonstraţia are două părţi:

a) Dacă M este un model numărabil al AP, atunci M este model al lui ψ. Acest lucru decurge imediat, dacă observăm că ψ e o consecinţă a principiului inducţiei matematice, formalizat în logica de ordinul doi, prin generalizare existenţială (deci prin aplicarea axiomei $\psi(f) \rightarrow (\exists\ u)\ \varphi(u)$).

b) Dacă M este un model al lui ψ, atunci M este infinit numărabil. Să presupunem deci, că $M \models \psi$. Atunci, există un obiect $a \in A$ (domeniul lui M) şi o funcţie f: $A \rightarrow A$, astfel încât dacă interpretăm pe 0 ca a şi pe S ca f, avem

(1) $M \models (\forall\ X)\ ((X(0) \cdot (\forall\ v)\ (X(v) \rightarrow X(S\ v)) \rightarrow (\forall\ v)\ X(v))\ ((a, f))$

Fie acum D o submulţime a lui A, definită astfel:

$D = \{a, f(a), f(f(a)), f(f(f(a))), \ldots\}$

Să luăm un predicat P unar care este interpretat în M ca D, deci $I(P) = D$. Dar dacă propoziţia (1) este adevărată (potrivit lui 16.8.2)), e adevărată şi:

(2) $M \models (P(0) \cdot (\forall\ v)\ (P(v) \rightarrow P(Sv)) \rightarrow (\forall\ v)\ P(v))\ ((a, f, D))$

Or, $P(0)$ e adevărată în M, fiindcă $I(0) = a$ şi $I(P) = D$, iar $a \in D$. De asemenea, în M e adevărată şi propoziţia $(\forall\ v)(P(v) \rightarrow P(S(v))$, fiindcă ea revine la a spune că dacă un obiect $a \in D$, atunci şi $f(a) \in D$. Aşadar, avem

(3) $M \models (P(0) \cdot (\forall\ v)\ (P(v) \rightarrow P(S\ v))\ ((a, f, D))$

Din (2) şi (3) obţinem imediat

(4) $M \models (\forall\ v)\ (P(v)\ ((a, f, D))$

Potrivit definiţiei noţiunii de satisfacere (definiţia (11.3), punctul (c)), înseamnă că în M interpretarea lui P este A. Deci $D = A$. Însă D este o mulţime infinit numărabilă, deci domeniul lui M este tot aşa – ceea ce înseamnă că M este numărabil, q.e.d.

Aşadar, ψ e o propoziţie adevărată numai în modele numărabile ale lui L_{AP} şi este, deci, falsă, în toate modelele nenumărabile ale lui L_{AP}. Prin urmare, φ este adevărată în aceste modele nenumărabile, însă e falsă în toate modelele numărabile de L_{AP}. Teorema Löwenheim-Skolem nu este valabilă pentru logica de ordinul doi.

În logica de ordinul doi se poate demonstra următorul rezultat foarte puternic:

(16.10) Dacă M este un model al AP, atunci M este izomorf cu modelul standard MN al AP, în simboluri:

Dacă $M \models AP$, atunci $M \cong MN$.

Teorema spune că aritmetica lui Peano, formalizată în logica de ordinul doi, nu are modele nestandard. Incompletitudinea logicii de ordinul doi şi faptul că în ce o priveşte teorema de compactitate cade sunt consecinţe ale lui (16.10). Cu titlu de exemplu, să arătăm că în logica de ordinul doi teorema de compactitate nu este valabilă. Aceasta revine la a arăta că

(16.11) Există o teorie T formulată în logica de ordinul întâi astfel încât: a) toate submulţimile ei finite au un model; dar b) T nu are nici un model.

Demonstraţie. Să observăm mai întâi că în logica de ordinul doi, întrucât – aşa cum am văzut – AP este finit axiomatizabilă, putem construi conjuncţia celor şapte axiome ale AP. Prin urmare, aritmetica de ordinul doi a lui Peano are o singură axiomă, pe care să o notăm cu AP. Fie acum T teoria

$T = \{AP, a \neq 0, a \neq 1, a \neq 2, ...\}$

Orice submulţime finită a lui T are un model. Într-adevăr, în o submulţime finită Δ a lui T, pentru un număr n, propoziţia $a \neq n$ nu aparţine lui Δ. Atunci luăm ca model al lui Δ pe MN, în care interpretăm pe a ca n, $I(a) = n$. Dar să presupunem că T însăşi are un model M. M este un model al limbajului $L = L_{AP} \cup \{a\}$. Fie M' acel model al L_{AP} care are acelaşi domeniu cu M şi ataşează simbolurilor 0, S, +, · (= simbolurilor din L_{AP}) aceleaşi interpretări pe care le ataşează acestor simboluri modelul M. Dar, desigur, M' nu ataşează nimic simbolului a. Însă în M sunt adevărate toate propoziţiile $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq 2$, ..., deci M' nu este izomorf cu MN, modelul standard al AP.

Pe de altă parte, $M \models AP$ şi, potrivit construcţiei lui M', vom avea şi $M' \models AP$. Dar atunci teorema (16.10) garantează că M' este izomorf cu MN. Contradicţie. Deci, T nu are nici un model, deşi toate submulţimile sale finite au un model, ceea ce indică faptul că teorema de compactitate nu este valabilă în logica de ordinul doi.

*
* *

Exemplele de extinderi ale logicii de ordinul întâi au evidenţiat faptul că

a) pe plan sintatic, se pot construi noi formule şi noi demonstraţii;

b) pe plan semantic, se pot demonstra teoreme noi (de pildă, (16.10)), iar alte teoreme devin false.

În mod obişnuit, definim o *logică* (logica propoziţională ori logica predicatelor de ordinul întâi) prin clasa propoziţiilor pe care ele le selectează ca demonstrabile sau, ceea ce e acelaşi lucru, ţinând seama de teorema de completitudine,

prin clasa propoziţiilor ei valide. Odată selectată o atare clasă de propoziţii, ne întrebăm, în al doilea rând, ce putem spune despre ea: satisface sau nu compactitatea? satisface sau nu teorema lui Craig?

Prin extinderile logicii de ordinul întâi, între care cele trei prezentate mai sus, s-a încercat să se procedeze analog. Se construiau noi clase de propoziţii (dacă acea construcţie era făcută sintatic, aveam o clasă de propoziţii demonstrabile; dacă acea construcţie era făcută semantic, aveam o clasă de propoziţii valide) şi se căutau apoi proprietăţi ale acesteia (compactitatea, completitudinea, definibilitatea, interpolarea etc.). Clasa propoziţiilor demonstrabile (sau valide) *determină* clasa proprietăţilor metateoretice care sunt valabile pentru acea logică.

Să întrebăm însă acum invers: presupunând că ştim că o logică satisface anumite astfel de proprietăţi, vom şti ceva sigur şi despre propoziţiile demonstrabile (sau valide) ale acelei logici? Altfel zis: determină clasa proprietăţilor metateoretice, clasa propoziţiilor demonstrabile (sau a propoziţiilor valide ale) unei logici? Dacă strategia de cercetare descrisă mai devreme era impulsionată de intuiţie, acum intuiţia nu ne spune nimic.

În 1969, Lindström a dovedit că răspunsul la întrebările puse aici este uneori afirmativ. El a arătat că logica de ordinul întâi este caracterizată de două astfel de proprietăţi metateoretice. Anume, el a arătat că dacă vrem să extindem logica de ordinul întâi, atunci nu vom putea face aceasta decât cu preţul abandonării a cel puţin uneia din cele două proprietăţi. Altfel zis, logica de ordinul întâi este *cea mai puternică* logică relativ la care sunt satisfăcute cele două proprietăţi.

(16.12) *Teorema lui Lindström.* Fie L un limbaj al logicii de ordinul întâi, iar L' un limbaj care a) include pe L; şi b) este limbaj al unei extinderi a logicii de ordinul întâi care are următoarele două proprietăţi:

1) *Proprietatea descendentă Löwenheim-Skolem* (dacă o propoziţie σ a lui L' are un model, atunci are şi un model infinit numărabil).

2) *Proprietatea de compactitate* (orice teorie T din L' are un model ddacă orice parte finită a ei are un model).

Atunci pentru orice propoziţie σ a lui L' există o propoziţie τ a lui L astfel încât σ şi τ au exact aceleaşi modele.

Sensul teoremei (16.12) este evident: dacă există o propoziţie validă într-o extindere L a logicii de ordinul întâi, dar nu e validă în logica de ordinul întâi, atunci în L fie cade teorema descendentă Löwenheim-Skolem, fie cade teorema de compactitate. Nu se poate, deci, să păstrăm acele teoreme laolaltă şi să adăugăm logicii de ordinul întâi noi puteri expresive (altfel zis, să o extindem).

Logica de ordinul întâi este cea mai puternică logică în care sunt satisfăcute condiţiile (1) şi (2).

§ 17. Exerciţii

1. Formalizaţi într-un limbaj de ordinul întâi următoarele propoziţii din limba naturală:

a) Toţi cei care sunt politiceni sunt şi ambiţioşi.

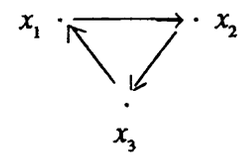
b) Nu e adevărat că toţi oamenii ambiţioşi nu sunt oneşti.

c) Oricine iubeşte pe cineva.

d) Oricine admiră pe cineva care îi admiră pe toţi.

e) Nimeni nu admiră pe cineva care îi admiră pe toţi cei care admiră pe cineva.

2. Fie $L = \{c_1, c_2, c_3, P\}$ un limbaj cu trei constante şi un predicat binar. Fie un model M al lui L definit astfel: $M = \{\{c_1, c_2, c_3\}, R\}$. Modelul M poate fi reprezentat prin figura



Relaţia R are loc între două obiecte (nu neapărat diferite între ele) atunci când o săgeată leagă cele două obiecte. Să se determine valorile de adevăr la M ale următoarelor propoziţii:

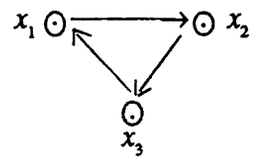
a) $(\forall\ v)(\exists\ v')\ P(v, v')$

b) $(\forall\ v)(\exists\ v')\ P(v', v)$

c) $(\exists\ v)(\forall\ v')\ P(v, v')$

d) $(\exists\ v)(\forall\ v')\ P(v', v)$

3. Fie un limbaj $L' = \{c_1, c_2, c_3, P, Q\}$, unde c_1, c_2, c_3 sunt constante, P e un predicat binar iar Q un predicat unar. Un model M al lui L' e reprezentat grafic după cum urmează:



Aici Q e interpretat ca acea proprietate pe care o are un obiect dacă în reprezentarea grafică există un cerc în jurul punctului care stă pentru acel obiect, iar P este interpretat ca în exerciţiul 2:

a) Descrieţi detaliat interpretarea I a limbajului L' în M.
b) Determinaţi valoarea de adevăr în M a următoarelor propoziţii:

(i) $(\exists\ v)\ (\exists\ v')\ (\exists\ v'')\ (P(v, v') \cdot Q(v') \cdot P\ (v, v'') \cdot -\ Q(v''))$
(ii) $(\forall\ v)\ P(v, v)$
(iii) $(\exists\ v)\ (P\ (v, c_2) \cdot Q(v))$
(iv) $(\forall\ v)\ (P\ (v, v) \leftrightarrow -\ Q(v))$
(v) $(\forall\ v)\ (P(v, v) \rightarrow ((\exists\ v')\ (P\ (v, v') \cdot Q(v')))$
(vi) $(\forall\ v)\ (Q(v) \rightarrow (\exists\ v')\ P(v, v'))$

4. Folosind relaţia de identitate, formalizaţi într-un limbaj de ordinul întâi propoziţiile:

a) Ion o iubeşte pe Mihaela, dar Mihaela iubeşte pe altcineva.
b) Ion nu o iubeşte pe Mihaela, ci pe altcineva.
c) Pe Ion nu îl iubeşte decât Mihaela.
d) Ion iubeşte toate fetele, cu excepţia Mihaelei.
e) Numai Ion o iubeşte doar pe Mihaela.
f) Oricine iubeşte doar o persoană.
g) Oricine iubeşte doar o altă persoană.
h) Oamenii care iubesc pe toţi ceilalţi în afară de ei sunt altruişti.

5. Găsiţi două modele ale limbajului $L = \{P\}$ care să aibă câte trei obiecte, dar în care propoziţia

$(\forall\ v)\ (\forall\ v')\ (P(v, v') \vee P(v', v) \vee v = v') \cdot (\forall\ v)\ (\forall\ v')\ (P(v, v') \rightarrow -\ P(v', v))$

să aibă valori de adevăr diferite:

6. Arătaţi că propoziţia:

$(\forall\ v)\ (\exists\ v')\ P(v, v') \cdot (\forall\ v) - P(v, v) \cdot (\exists\ v)\ (\forall\ v') - P(v', v) \cdot (\forall\ v)\ (\forall\ v')\ (\forall\ v'')\ ((P\ (v, v'' \cdot P(v', v'') \rightarrow v = v')$

are numai model infinite.

7. Arătaţi că următoarele propoziţii nu sunt valide, construind modele în care valoarea lor de adevăr este falsul:

a) $((\exists\ v)\ P(v) \cdot (\exists\ v)\ Q(v)) \rightarrow (\exists\ v)\ (P(v) \cdot Q(v))$
b) $((\forall\ v)\ (P(v) \rightarrow Q(v)) \cdot (\exists\ v)\ Q(v)) \rightarrow -\ (\exists\ v)\ P(v)$
c) $(\forall\ v)\ (\exists\ v')\ P(v, v') \rightarrow (\exists\ v)\ P(v, v)$
d) $((\forall\ v)\ (\exists\ v')\ P(v, v') \cdot (\forall\ v)\ (P(v, v) \rightarrow Q(v))) \rightarrow (\exists\ v)\ Q(v)$
e) $((\forall\ v)\ (Q(v) \leftrightarrow (\forall\ v')\ P(v, v')) \cdot (\exists\ v')(\forall\ v')\ (Q(v') \leftrightarrow v\ =\ v')) \rightarrow (\forall\ v)\ (\forall\ v')\ ((P(v, v) \cdot P(v', v') \rightarrow v = v')$

8. Demonstraţi următoarele metateoreme:

a) Dacă φ şi ψ sunt propoziţii, atunci

$\models \varphi \leftrightarrow \psi$ ddacă $\varphi \models \psi$ şi $\psi \models \varphi$

b) Dacă $\varphi_1, \ldots \varphi_n$, ψ şi χ sunt propoziţii, atunci

$\varphi_1, \ldots \varphi_n \models \psi \leftrightarrow \chi$ ddacă $\varphi_1, \ldots \varphi_n \models \psi$ şi $\varphi_1, \ldots \varphi_n \models \chi$

c) Dacă φ şi ψ sunt propoziţii, $\models \varphi \leftrightarrow \psi$, iar φ e o subformulă a lui χ şi χ (φ/ψ) e rezultatul înlocuirii în χ a lui φ prin ψ, atunci

$\models \chi \leftrightarrow \chi(\varphi/\psi)$

d) $(\forall v_1) \ldots (\forall v_n)$ $(\varphi \leftrightarrow \psi) \models \chi \leftrightarrow \chi(\varphi/\psi)$

unde toate variabilele care apar în φ şi ψ sunt printre $v_1, \ldots v_n$.

9. Spunem că o mulţime Σ de propoziţiie ale unui limbaj L de ordinul întâi are modele arbitrar de mari, dacă pentru orice număr natural n, există un model al lui Σ al cărui domeniu are cel puţin n elemente.

Arătaţi că

a) Dacă Σ are modele arbitrar de mari, atunci are un model infinit;

b) Nici o propoziţie nu e adevărată în toate şi numai modelele finite ale lui L.

10. Fie un limbaj $L = \{<\}$ şi o teorie în L având următoarele axiome:

a) $(\forall v) - (v < v)$

b) $(\forall v)(\forall v')(\forall v'')((v < v' \cdot v' < v'') \rightarrow v < v'')$

c) $(\forall v)(\forall v')(v < v' \vee v' < v \vee v = v')$

d) $(\forall v)(\exists v')(v < v')$

e) $(\forall v)(\exists v')(v' < v)$

f) $(\forall v)(\forall v')(v < v' \rightarrow (\exists v'')(v < v'' \cdot v'' < v')$

Arătaţi că toate modelele infinite numărabile ale teoriei sunt izomorfe.

11. Fie R o relaţie binară şi R* o relaţie definită astfel:

$R^*(c, c) = \text{df}\ ((\forall X)(X(c) \cdot (\forall v)(\forall v')((X(v) \cdot R(v, v')) \rightarrow X(v'))) \rightarrow X(c'))$

a) Arătaţi că următoarele propoziţii sunt valide:

i) $(\forall v)(\forall v')(R(v, v') \rightarrow R^*(v, v'))$

ii) R* este reflexivă şi tranzitivă.

b) Dacă $R(c, c')$ are înţelesul: c e un copil al c', care este înţelesul lui $R^*(c, c')$?

12. Spunem că o formulă este în formă normală *prenexă* dacă toţi cuantificatorii sunt plasaţi în extrema ei stângă; o formulă este *universală* dacă e dată în forma prenexă şi toţi cuantificatorii ei sunt universali; şi este *existenţială* dacă e dată în forma prenexă şi toţi cuantificatorii ei sunt existenţiali. Arătaţi că:

a) Dacă φ este universală, $M \models \varphi$ şi M' e un submodel al lui M, atunci $M' \models \varphi$.

b) Dacă φ este existenţială, $M \models \varphi$ şi M este un submodel al lui M', atunci $M' \models \varphi$.

13. Fie M şi M' două modele elementar echivalente ale unui limbaj L. Să presupunem că fiecare element al domeniului lui M este interpretarea unei constante a lui L, şi la fel pentru M'. Arătaţi că, în acest caz, M şi M' sunt izomorfe.

14. Demonstraţi propoziţiile: (10.9), (10.10), (10.11), (10.12).

Capitolul IV

CUANTIFICARE ŞI FORMALIZARE

Am văzut, în capitolul anterior, că logica de ordinul întâi a predicatelor e îndeajuns de puternică pentru a putea reconstrui în cadrul ei teorii interesante şi puternice (precum teoria mulţimilor ori aritmetica lui Peano). Atari reconstrucţii în logica de ordinul întâi ne permit să înţelegem mai bine natura susţinerilor noastre – altfel zis, structura logică a acestora – precum şi relaţiile logice dintre ele. Reconstrucţiile în logica de ordinul întâi sunt menite aşadar să releve *forma logică* a acestor susţineri.

Acum ne putem întreba: care este forma logică a unora dintre cele mai comune susţineri pe care le facem? De pildă, ne-am putea întreba ce susţineri facem atunci când formulăm propoziţii ca:

(1) Toţi caii sunt mamifere.
(2) Toţi inorogii sunt mamifere.
(3) Preşedintele de astăzi al Rusiei este un politician abil.
(4) Regele de astăzi al Franţei este inteligent.
(5) Pegas nu există.
(6) Există tigri bengalezi.

Să remarcăm, mai întâi, că unele dintre aceste propoziţii sunt în chip evident foarte importante pentru filosofi. Astfel, ultimele două sunt importante pentru că exprimă afirmaţii sau negaţii despre existenţa a ceva; la rândul lor, primele două au jucat un rol remarcabil în istoria gândirii europene: într-adevăr, identificată cu logica, silogistica lui Aristotel lua propoziţii precum acestea ca singurele care redau natura reală a susţinerilor noastre despre lume. În sfârşit, filosofi precum B. Russell au argumentat viguros că propoziţii precum (3) şi (4) sunt deosebit de relevante în unele chestiuni filosofice.

Acum ne-am putea întreba: Cum putem reda în logica de ordinul întâi propoziţii ca cele de mai sus? Şi, în al doilea rând, ce obţinem odată ce vom fi reuşit într-o astfel de întreprindere? Voi lăsa pentru paragrafele următoare ale

acestui capitol configurarea unui răspuns la prima întrebare. Dar de pe acum aş vrea să menţionez motivele pentru care am ales – din clasa atât de vastă a propoziţiilor din limba română (şi, în acelaşi timp, semnificative pentru un filosof) – pe acelea pe care le-am tratat aici. În primul paragraf vom aborda propoziţiile categorice. Teoria lor – silogistica – a fost formulată încă în Antichitate de Aristotel. Problema care va fi abordată aici e aceea a posibilităţii de a traduce silogistica în logica de ordinul întâi. Cum vom vedea, traducerea este posibilă, dar nu e unică: filosoful – ghidat de consideraţii nu numai logice, dar şi epistemologice ori metafizice – va putea să aprecieze corespunzător cele două traduceri alternative pe care le vom menţiona.

Logicile multisortate şi cuantificarea restrânsă sunt, la rândul lor, două modalităţi alternative de a formaliza într-un limbaj de ordinul întâi propoziţii din limba naturală. Cum vom vedea, fiecare alternativă are avantajele şi dezavantajele sale; apoi, există modalităţi sistematice de a corela cele două alternative (prin intermediul unor teoreme de „reprezentare" a unui limbaj de ordinul întâi într-altul tot de ordinul întâi). Întrebarea care rămâne este însă dacă putem pretinde că o traducere, mai mult decât alta, redă *forma logică* a propoziţiilor de la care am plecat.

Ultimele două paragrafe ale capitolului sunt foarte importante pentru un filosof: acolo sunt prezentate diferite strategii de a aborda susţineri despre obiectele individuale – susţineri că ele au anumite proprietăţi ori că există. Este posibil să formulăm astfel de susţineri în logica de ordinul întâi? Iar dacă pornim de la ipoteza că răspunsul este afirmativ, cum vom proceda? Probabil că cel mai important rezultat care decurge din cele două paragrafe e că forma logică a susţinerilor noastre despre obiectele individuale nu e aceeaşi cu forma lor gramaticală; că structura logică, exprimată de traducerea, formalizarea lor într-un limbaj de ordinul întâi, uneori nu poate fi recunoscută prin simpla privire la felul în care acea susţinere arată când o exprimăm în limba naturală.

Cu aceasta am ajuns la cea de-a doua întrebare: Presupunând că vom fi reuşit să traducem într-un limbaj de ordinul întâi diferite susţineri din limba naturală, care e noima acestui succes? Ideea fundamentală a acelor filosofi care s-au angajat în dezvoltarea logicii filosofice a fost aceea că astfel vom fi recunoscut *sensul real* al susţinerilor noastre; că nu vom mai fi induşi în eroare de ingredienţi accidentali ai acestora (între care se află forma gramaticală a susţinerilor noastre, atunci când le producem într-o limbă naturală). De exemplu, eu spun că există tigri bengalezi. Ce spune însă în realitate această susţinere a mea? Răspunsul pare simplu: spune ceva despre tigrii bengalezi, anume că ei sunt printre obiectele din lumea noastră. Numai că, odată ce vom încerca, plecând de la această ipoteză, să formalizăm în logica de ordinul întâi o astfel de susţinere, vom vedea că întâlnim dificultăţi grave. O traducere mai adecvată a ei în logica de ordinul întâi ne solicită să admitem că forma ei logică e alta decât cea pe care am

presupus-o (anume, vom admite că ea nu spune ceva despre niște obiecte – tigrii bengalezi – ci despre un concept – conceptul de a fi tigru bengalez: că el e astfel încât cel puțin un obiect cade sub el). Pentru filosof, acest rezultat poate fi extrem de important. El va trebui să decidă: să tragă concluzii epistemologice ori metafizice plecând de la ceea ce o susținere apare ca exprimând, când e formulată în limba naturală, sau să tragă o atare concluzie plecând de la ceea ce o susținere apare ca exprimând cînd e dată într-un limbaj logic de ordinul întâi.

Logicianul ar paria pe cea de-a doua cale; dar filosoful poate încă să rămână în dubiu. Important e însă, chiar de pe acum, că o prejudecată s-a zguduit: aceea că, atunci când facem o susținere (în limba naturală), suntem siguri care e natura a ceea ce susținem realmente.

§ 18. Propozițiile categorice

Fie $L = \{ A, I, a, b, c, ... \}$ un limbaj în care A și I sunt simboluri predicative binare, iar a, b, c ... sunt constante individuale. Să construim în L o teorie SA închisă numită *silogistica aristotelică*. SA are următoarele axiome:

A1. $(\forall\ v)\ Avv$

A2. $(\forall\ v)\ Ivv$

A3. $(\forall\ v)\ (\forall v_1)\ (\forall v_2)\ ((Avv_1 \cdot Av_2v) \rightarrow Av_2v_1)$

A4. $(\forall\ v)\ (\forall v_1)\ (\forall v_2)\ ((Avv_1 \cdot Ivv_2) \rightarrow Iv_2v_1)$

Pentru a simplifica notația, am scris, de pildă Avv_1 în loc de $A(v,v_1)$ sau Ivv_2 în loc de $I(v, v_2)$. Se definesc două noi relații, E și O, precum urmează:

D_1. $E(v, v_1) = df - I(v, v_1)$

D_2. $O(v, v_1) = df - A(v, v_1)$

Intuiția care stă în spatele acestei construcții este aceea de a interpreta expresiile de forma *Aab*, *Eab*, *Iab* și *Oab* ca *propoziții categorice*. O propoziție categorică este de forma subiect-predicat și afirmă sau neagă predicatul despre tot sau despre o parte a subiectului. Propozițiile categorice sunt de patru feluri:

a) propoziții universal afirmative, de forma: Toți *a* sunt *b*; formal: *Aab*;

b) propoziții universal negative, de forma: Nici un *a* nu este *b*; formal: *Eab*;

c) propoziții particular afirmative, de forma: Unii *a* sunt *b*; formal: *Iab*;

d) propoziții particular negative, de forma: Unii *a* nu sunt *b*; formal: *Oab*.

În cadrul teoriei *SA* pot fi demonstrate ca teoreme toate raționamentele cunoscute sub numele de *inferențe imediate*, precum și toate *modurile silogistice*. Ca exemplu, iată câteva teoreme ale teoriei *SA*:

T1. $(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)(Av_1v_2 \rightarrow Iv_2v_1)$ (conversiunea universal afirmativei)

T2. $(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)(Iv_1v_2 \rightarrow Iv_2v_1)$ (conversiunea particular afirmativei)

T3. $(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)(Ev_1v_2 \rightarrow Ev_2v_1)$ (conversiunea universal negativei)

T4. $(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)(Av_1v_2 \rightarrow Iv_1v_2)$ (subalternarea particular afirmativei faţă de universal afirmativă)

T5. $(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)(Ev_1v_2 \rightarrow Ov_1v_2)$ (subalternarea particular negativei faţă de universal negativă)

T6. $(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)(Av_1v_2 \rightarrow -Ev_1v_2)$ (contrarietatea dintre universalele afirmativă şi negativă)

T7. $(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)(Iv_1v_2 \vee Ov_1v_2)$ (subcontrarietatea dintre particularele afirmativă şi negativă)

T8. $(\forall\, v)(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)((Evv_1 \cdot Av_2v) \rightarrow Ev_2v_1)$ (modul Celarent)

T9. $(\forall\, v)(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)((Avv_1 \cdot Iv_2v) \rightarrow Iv_2v_1)$ (modul Darii)

T10. $(\forall\, v)(\forall\, v_1)(\forall\, v_2)((Evv_1 \cdot Iv_2v) \rightarrow Ov_2v_1)$ (modul Ferio)

De fapt, se poate demonstra următorul rezultat general: în teoria *SA* sunt teoreme toate inferenţele imediate şi toate modurile silogistice admise de Aristotel; nu sunt teoreme toate inferenţele mediate şi toate modurile silogistice respinse de Aristotel[1].

Această modalitate de a construi silogistica aristotelică drept o teorie formalizată de ordinul întâi provine din cercetările logicianului polonez J. Lukasiewicz; voi spune de aceea că această aximatizare a silogisticii aristotelice este de tip Lukasiewicz.

Să trecem acum la semantică. Un model pentru *L* este o structură $<D, R, R'>$, unde *D* este o colecţie de obiecte, iar *R* şi *R'* sunt relaţii binare pe *D*, *R* fiind interpretarea lui *A* şi *R'* interpretarea lui *I*. Modelul standard al teoriei *SA* se construieşte astfel: *D* este o colecţie de mulţimi nevide de obiecte şi nici un obiect din *D* nu le cuprinde pe toate celelalte; *A* este interpretată ca relaţia de incluziune între elementele domeniului, iar *I* ca o relaţie care are loc între două obiecte ale domeniului dacă şi numai dacă intersecţia acestora este nevidă. Se observă uşor că, într-un astfel de model *M*, avem:

$M \models SA$

Spre exemplu, $(\forall\, v)\, Avv$ este adevărată întrucât pentru orice mulţime *X* din *D* este întotdeauna cazul că $X \subseteq X$; A_3 este adevărată în *M* în virtutea tranzitivităţii relaţiei de incluziune între mulţimi etc. Să observăm că, pentru

[1] În acest sens a se vedea, de exemplu, monografia lui I. Didilescu şi P. Botezatu, *Silogistica. Teoria clasică şi interpretările moderne*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1976, în special pp. 38–126 şi 374–380.

a arăta că A_2: $(\forall\ v)\ Ivv$ e nevoie să facem apel la cerinţa ca toate mulţimile cuprinse în D să fie *nevide*.

Silogistica aristotelică a fost construită aici ca o teorie de ordinul întâi, în limbajul $L = \{A, I, a, b, c, ...\}$. Acestei construcţii de tip Lukasiewicz i se pot aduce însă câteva obiecţii. În primul rând, constantele individuale *a, b, c* ... sunt înţelese, în mod intuitiv, ca termeni care denotă clase de obiecte, individuale. Lucrul acesta se poate observa cu uşurinţă dacă luăm în seamă modelul standard al silogisticii aristotelice *SA*: prin funcţia de interpretare, constantei individuale *a*, de pildă, îi va corespunde un obiect din domeniul *D*; însă, pe de altă parte, acest obiect trebuie tratat ca o clasă de obiecte. Să luăm propoziţia:

(18.1) Toţi oamenii sunt muritori.

Ea va fi formalizată în limbajul *L* după cum urmează: notăm „om" cu *a* şi „muritor" cu *b*. Obţinem propoziţia

(18.1′) Toţi *a* sunt *b*.

care în *L* este:

(18. 1′′) *Aab*

În *L* tratăm expresiile „om" şi „muritor" drept constante individuale; dar, intuitiv, acesta ne apar ca *simboluri predicative*.

Aşadar, o formalizare adecvată în logica de ordinul întâi a silogisticii ar trebui să trateze termenii (care în propoziţiile categorice joacă rolul de subiect sau predicat) ca simboluri predicative, mai degrabă decât ca expresii constante individuale.

O a doua obiecţie este aceea că în *L* silogistica aristotelică este tratată ca o teorie de ordinul întâi finit axiomatizabilă (în fapt, ea are patru axiome). Acest lucru este posibil pentru că termenii silogistici *a, b, c* ... sunt trataţi drept constante individuale şi deci – cum limbajul *L* este de ordinul întâi – avem la dispoziţie variabile cuantificabile care iau termenii ca valori. În mod obişnuit, silogistica este însă înţeleasă ca o teorie care e dată prin schema axiomatice, nu prin axiome. Să luăm, de pildă, axioma.

A_3: $(\forall\ v)\ (\forall\ v_1)\ (\forall\ v_2)\ ((Avv_2 \cdot Av_2v) \rightarrow Av_2v_1)$

Ea reprezintă modul silogistic Barbara, din figura întâi silogistică. În mod obişnuit, acest mod e prezentat în felul următor:

(18.2) $M\ A\ P$
$\underline{S\ A\ M}$
$S\ A\ P$

unde *M, S* şi *P* sunt simboluri care stau pentru termenii silogismului. Toate silogismele de tip Barbara sunt valide: aceasta înseamnă că orice termeni concreţi am pune în locul simbolurilor *M, S* şi *P*, niciodată nu vom obţine un silogism

ale cărui premise să fie adevărate iar concluzia falsă. Însă acest lucru nu trebuie înţeles în sensul că simbolurile *M*, *S* şi *P* sunt variabile (cuantificate universal) care pot fi instanţiate cu diverşi termeni concreţi. Mai curând *M*, *S* şi *P* sunt *metasimboluri* – simboluri pe care le folosim în metalimbaj pentru a numi termenii concreţi. De aici decurge că (18.2) este nu o formulă, ci o *schemă* de raţionament. În mod tradiţional, silogistica a fost prezentată cu ajutorul schemelor de raţionament; nu avem a face cu axiome silogistice, ci cu scheme axiomatice silogistice.

În al treilea rând, în formalizarea de tip Lukasiewicz se iau ca primitive relaţiile silogistice *A* şi *I*. Problema este dacă nu cumva ele pot fi definite. Fie din nou propoziţia (18.1). Cel ce a studiat logica predicarelor de ordinul întâi este imediat tentat să-i ofere următoarea formalizare: notăm „om" cu *F* şi „muritor" cu *G*. Aici *F* şi *G* sunt simboluri predicative. Într-un limbaj de ordinul întâi, care conţine aceste simboluri, propoziţia (18.1) va fi formalizată prin:

(18.3) $(\forall\ v)\ (F(v) \rightarrow G(v))$

În (18.3), în afara celor două simboluri predicative, nu intervin decât simboluri logice: variabile, cuantificatori, conective logice; împreună, acestea dau seamă însă de rolul pe care, în formalizarea de tip Lukasiewicz, se admitea că îl are relaţia silogistică *A*. Potrivit interpretării (18.3) relaţia *A* este însă definibilă în termeni logici. Obiecţia ar suna, deci, astfel: formalizarea de tip Lukasiewicz este redundantă, căci ia ca simboluri predicative (în limbajul de ordinul întâi considerat) relaţii logice.

Toate acestea sugerează o altă modalitate de a construi silogistica aristotelică drept teorie de ordinul întâi. Fie $L' = \{F, G, H \ldots\}$ un limbaj de ordinul întâi, în care *F*, *G*, *H* ... sunt simboluri predicative unare. Propoziţiile categorice de tip *A*, *E*, *I*, *O* se formalizează în acest limbaj astfel:

a) propoziţii de tip *A* (Toţi *F* sunt *G*): $(\forall\ v))\ (F(v) \rightarrow G(v))$ prescurtat: *FaG;*

b) propoziţii de tip *E* (Nici un *F* nu este *G*): $(\forall\ v)\ (F(v) \rightarrow -\ G(v))$, prescurtat: *FeG*;

c) propoziţii de tip *I* (Unii *F* sunt *G*): $(\exists\ v)\ (F(v) \cdot G(v)$, prescurtat: *FiG*;

d) propoziţii de tip *O* (Unii *F* nu sunt *G*): $(\exists\ v)\ (F(v) \cdot -\ G(v))$, prescurtat: *FoG*.

Cum în *L* nu apar simboluri propriu-zis silogistice, nu putem construi silogistica aristotelică drept o teorie cu anumite axiome, sau scheme axiomatice *nelogice*. Problema revine la a determina ce raţionamente de o anumită formă sunt *demonstrabile* în *L'* (sau, echivalent, prin teorema de completitudine: sunt *valide* în *L'*).

Vom folosi literele *M*, *N*, *P* ... ca *metavariabile* pentru simbolurile predicative *F*, *G*, *H* ... Se poate demonstra următoarea teoremă:

T 11. Următoarele formule sunt demonstrabile în L':

a) MaM;

b) $(MaP \cdot NaM) \rightarrow NaP$;

c) $(MaP \cdot MiN) \rightarrow NiP$.

Se observă uşor că cele trei scheme axiomatice corespund în L' axiomelor A_1, A_3, ale SA, formulate în L. În L' nu este însă demonstrabilă şi formula MiM, corespunzătoare axiomei A_2. Acest fapt face ca în L' să nu fie demonstrabile acele inferenţe imediate cu propoziţii categorice şi acele moduri silogistice legate de formula MiM. În particular, nu se pot demonstra:

i) subalternarea particularelor faţă de universale;

ii) conversiunea universal afirmativei;

iii) modurile silogistice demonstrabile în SA cu premise universale, dar cu concluzie particulară.

Acele inferenţe imediate cu propoziţii categorice şi moduri silogistice demonstrabile în L' constituie *silogistica absolută*. Ne interesează însă dacă se poate găsi o formalizare în L' a propoziţiilor categorice şi a raţionamentelor cu acestea sub care să fie demonstrabile toate (şi *numai*) teoremele silogisticii aristotelice. Vom dovedi că următoarea teoremă are loc:

T 12. Presupunem că există o funcţie f care pune în corespondenţă biunivocă simbolurile predicative din L' şi constantele individuale din L. Atunci: pentru orice formulă φ a lui L în care nu apare nici o variabilă există o formulă φ^+ a lui L', astfel încât

φ este teoremă a lui SA ddacă φ^+ este demonstrabilă în L'.

Să subliniem că atât L cât şi L' sunt limbaje de ordinul întâi; prin urmare, atât în L ca şi în L' silogistica este construită ca o teorie de ordinul întâi. Însă în L' această teorie cuprinde doar propoziţii demonstrabile; în acest sens se poate spune că în L' silogistica este „scufundată" în logica predicatelor de ordinul întâi sau că are un „model" exact în această logică.

Corespondenţa dintre formulele (fără variabile ale) lui L şi formulele lui L' se construieşte astfel. Fie mai întâi un simbol predicativ M din L'. M se numeşte aristotelic (şi scriem $Ar(M)$ în acest caz) dacă are loc:

$$(\exists\, v)\, M(v) \cdot (\exists\, v) - M(v)$$

Fie acum o formulă ψ a lui L' în care apar simbolurile predicative $M_1, M_2 \ldots M_n$. Se defineşte formula ψ_A ca:

$$(\mathrm{Ar}(M_1) \cdot \mathrm{Ar}(M_2) \cdot \ldots \mathrm{Ar}(M_n)) \rightarrow \psi$$

(mai pe scurt, vom scrie: $\psi_A = \mathrm{Ar}(\psi) \rightarrow \psi$

Procedăm acum la construirea corespondenţei dintre formulele lui L şi cele ale lui L'. Vom defini o funcţie g astfel:

(i) $g(Aab) = (\forall\ v)\ (f(a)\ (v) \rightarrow f(b)\ (v))$
(ii) $g(Eab) = (\forall\ v)\ (f(a)\ (v) \rightarrow -f(b)\ (v))$
(iii) $g(Iab) = (\exists\ v)\ (f(a)\ (v) \cdot f(b)\ (v))$
(iv) $g(Oab) = (\exists\ v)\ (f(a)\ (v)\ \cdot -f(b)\ (v))$
(v) $g(-\varphi) = -g(\varphi)$
(vi) $g(\varphi \cdot \psi) = g(\varphi) \cdot g(\psi)$; $g(\varphi \vee \psi) = g(\varphi) \vee g(\psi)$ etc.

Vom pune, pentru orice formulă φ fără variabile a lui L, $\varphi^+ = (g(\varphi))_A = \mathrm{Ar}(g(\varphi)) \rightarrow g(\varphi)$

Să presupunem, de exemplu, că φ este Iab; să luăm $f(a) = M$ şi $f(b) = N$. Atunci $g(Iab)$ va fi $(\exists\ v)\ (M(v) \cdot N(v))$, iar $(Iab)^+$ va fi:

$$((\exists\ v)\ (M(v) \cdot (\exists\ v) - (M(v) \cdot (\exists\ v)\ N(v) \cdot (\exists\ v) - N(v)) \rightarrow (\exists\ v)(M(v) \cdot N(v))$$

Să observăm că traducerea A2$^+$ a axiomei A_2 a *SA* este demonstrabilă. Într-adevăr, traducerea ei $(Iaa)^+$ în L' este

$$((\exists\ v)\ (M(v) \cdot (\exists\ v) - M(v)) \rightarrow (\exists\ v)\ (M(v) \cdot M(v))$$

care e evident demonstrabilă. Exemplul arată în ce constă exact diferenţa dintre această traducere şi cea menţionată mai sus, dar care nu făcea dreptate decât silogisticii absolute: vechea traducere este valabilă sub condiţia ca simbolurile predicative folosite să fie aristotelice – adică, să nu fie vide sau totale. Când această condiţie e împlinită, A_2 este admisă; or, cum am văzut, ea era cea care, în modelul standard al *SA*, formulată în *L*, cerea ca interpretările constantelor individuale să fie nevide. Vom numi această construcţie traducerea Jaskowski[1] a formulelor lui *L* în cele ale lui *L'*, iar rezultatul exprimat prin T_{12} – teorema lui Jaskowski.

Să trecem acum propriu-zis la demonstrarea teoremei T_{12}.

a) Suficienţa: dacă φ este teoremă a lui *SA*, atunci φ^+ este demonstrabilă în *L'*. Demonstraţia este trivială în cazul axiomelor A1, A3 şi A4; A2 a fost menţionată mai devreme. Acum să presupunem că pentru formulele φ şi $\varphi \rightarrow \psi$ teorema este valabilă, deci că dacă φ şi $\varphi \rightarrow \psi$ sunt teoreme ale lui *SA*, atunci φ^+ şi $(\varphi \rightarrow \psi)^+$ sunt demonstrabile în *L'*. Atunci ψ^+ e demonstrabilă în *L'*. Dar se observă uşor că:

(1) $(\varphi \rightarrow \psi)^+ = \mathrm{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow g(\varphi \rightarrow \psi)$
(2) $(\varphi \rightarrow \psi)^+ = \mathrm{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow (g(\varphi) \rightarrow g(\psi))$
(3) $(\varphi \rightarrow \psi)^+ \rightarrow (\mathrm{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow g(\varphi)) \rightarrow (\mathrm{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow g(\psi))$

Dar, conform definiţiei lui g şi a lui Ar, avem:

(4) $\mathrm{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow \mathrm{Ar}(g(\varphi))$

[1] A se vedea S. Vieru, *Axiomatizări şi modele ale sistemelor silogistice*, Editura Academiei, Bucureşti, 1975, pp. 61–72.

şi cum prin supoziţie φ^+, adică

(5) $\mathrm{Ar}(g(\varphi)) \rightarrow g(\varphi)$

este demonstrabilă în L', înseamnă (din (4) şi (5)) că şi

(6) $\mathrm{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow g(\varphi)$

e demonstrabilă în L'. Din (3) şi (6) decurge că formula

(7) $\mathrm{Ar}(g(\varphi \rightarrow \psi)) \rightarrow g(\psi)$

e validă în L'. Formulei (7) îi putem aplica teorema de interpolare a lui Craig. **Exerciţiu:** să se arate că $\mathrm{Ar}(g(\psi))$ este interpolantul căutat (a se folosi exerciţiul 32 de la capitolul I, § 6). Atunci este demonstrabilă în L':

(8) $\mathrm{Ar}(g(\psi)) \rightarrow g(\psi)$

adică ψ^+.

b) Necesitatea: dacă φ^+ este demonstrabilă în L', atunci φ e teorema în SA. Vom demonstra că dacă φ nu e teoremă în SA, atunci φ^+ nu e demonstrabilă în L'. Să presupunem, într-adevăr, că φ nu e teoremă a lui SA. Atunci mulţimea $\{\neg\varphi\}$ este SA consistentă şi deci, conform teoremei de completitudine, aplicată lui $\{\neg\varphi\}$ (o mulţime de formule ale limbajului L) – φ este adevărată într-un model al SA. Să luăm acest model ca fiind standard. Fie $T(\neg\varphi)$ mulţimea constantelor individuale ce apar în $\neg\varphi$ (şi, deci, φ). Prin interpretare, fiecărui element din $T(\neg\varphi)$ îi corespunde o mulţime nevidă şi netotală. Vom arăta acum că M este şi un model al lui L' şi că φ^+ este falsă în M. Ştim că φ^+ este $\mathrm{Ar}(g(\varphi)) \rightarrow g(\varphi)$; să arătăm că $\neg(\varphi^+) = \mathrm{Ar}(g(\varphi)) \cdot \neg g(\varphi)$ e adevărată în M. Primul conjunct $\mathrm{Ar}(g(\varphi))$ e adevărat în M. Într-adevăr, el afirmă că pentru orice constantă individuală a din L care apare în φ, e adevărat că

$(\exists\, v)\, f(a)\, (v) \cdot (\exists\, v)\, f(a)\, (v)$

deci că extensiunea la M a simbolului predicativ ce corespunde lui a este o mulţime nevidă şi netotală – ceea ce tocmai s-a presupus, odată admis că M este standard. Faptul că $\neg g(\varphi)$ e adevărată în M se demonstrează prin inducţie asupra complexităţii lui φ. Demonstraţia e lungă, dar nu e dificilă. Ea va fi lăsată ca exerciţiu cititorului.

Am arătat că $\neg(\varphi^+)$ are un model; prin urmare, aplicând din nou teorema de completitudine (de data aceasta mulţimii $\{\neg(\varphi^+)\}$ de formule ale lui L'), obţinem că $\{\neg(\varphi^+)\}$ este consistentă şi deci că φ^+ nu este demonstrabilă în L', q.e.d.

§ 19. Cuantificarea restrânsă şi logicile multisortate

De multe ori trebuie să manevrăm propoziţii în care diferitele variabile au domenii de valori diferite. De pildă, când spunem:

(19.1.1) Oricine a cumpărat ceva de la Ionescu.

(magazinul lui Ionescu fiind singurul din sat, să zicem), cuantificatorul „oricine" are ca domeniu locuitorii satului, în timp ce cuantificatorul „ceva" are ca domeniu

mărfurile din magazinul lui Ionescu. Desigur că am putea încerca să formalizăm pe (19.1.1) prin

(19.1.2) $(\forall\ v)\ (\exists\ v')\ C\ (v, v', c)$

unde C este predicatul a cumpăra, iar constanta c este un nume al lui Ionescu. Însă e limpede că ceva e greşit cu această formalizare; căci dacă ea ar fi corectă, atunci propoziţia:

(19.1.3) Oltul a cumpărat Luna de la Ionescu

ar trebui să fie cel puţin cu sens – ceea ce intuitiv cu siguranţă că nu e cazul. De multe ori, ceva asemănător se întâmplă atunci când lucrăm cu diverse teorii ştiinţifice. În geometrie, de pildă, vrem să vorbim despre lucruri atât de diferite cum sunt punctele, dreptele ori planele. Fie, de exemplu, propoziţiile:

(19.2.1) Între oricare două puncte se află un al treilea.

(19.2.2) Pe orice dreaptă se află cel puţin un punct.

E natural să încercăm să le formalizăm, prin:

(19.2.1′) $(\forall\ v)\ (\forall\ v')\ (\exists\ v'')\ I(v'', v, v')$

unde I este predicatul: a se afla între, şi, respectiv,

(19.2.2′) $(\forall\ v)\ (\exists\ v')\ P(v', v)$

unde P este predicatul a se afla pe. Dar iarăşi ceva nu e în regulă cu cele două formalizări, fiindcă din (19.2.1′) nu putem deriva

(19.2.1′′) $(\forall\ v')\ (\exists\ v'')\ I(v'', c, v')$

unde c e un nume pentru o dreaptă, căci predicatul I e înţeles ca exprimând o relaţie între trei *puncte*, câtă vreme, potrivit lui (19.2.1′′) expresia $I(v'', c, v')$ trebuie să exprime o relaţie între două puncte şi o dreaptă.Tot aşa, din (19.2.2′) nu putem deduce pe

(19.2.2′′) $(\exists\ v')\ P(v', c)$

unde c e un nume pentru un punct: acum predicatul P: a se afla pe – care stabileşte o legătură între un punct şi o dreaptă – ar trebui să aibă loc între două puncte.

Vom analiza două strategii de a face faţă acestor dificultăţi. Prima este motivată sintactic: conform acesteia, expresii ca $P(v', c)$ sau $I(v'', c, v')$ sau (19.1.3) nu sunt bine construite. Lingviştii au discutat pe larg această opţiune, luând exemple precum

(19.3) Idei verzi necolorate dorm furioase.

Această strategie a condus la elaborarea aşa-numitelor *logici multisortate*. Cea de a doua strategie a motivată semantic: potrivit ei, problema nu e aceea de a construi anumite expresii, ci de a le atribui în mod corespunzător valori de adevăr. Aplicarea ei face uz pe larg de conceptul de *cuantificare restrânsă*.

a) *Logicile multisortate*. Într-un limbaj *Ln* multisortat (cu n sorturi) constantelor individuale le este ataşat un sort (şi vom scrie $c_1^{m'}$, $c_2^{m''}$ etc., unde m'

şi m'' sunt sorturile lui c_1, respectiv c_2); intuitiv, sortul ataşat unei constante indică genul de obiecte pe care le poate denota acea constantă. De pildă, unele constante pot denota oameni, altele mărfuri cumpărate de aceştia, altele râuri; sau unele pot denota puncte, altele linii, altele planuri etc. Corespunzător, se introduc variabile de diferite sorturi v_i^m (indicele superior indică sortul variabilei) care iau ca valori obiecte de un anumit sort. Mai departe, predicatele şi simbolurile funcţionale sunt astfel încât locurile lor goale pot fi ocupate doar de termeni de sorturi corespunzătoare. De pildă, predicatul C^3 (a cumpăra) e luat astfel încât primul şi al treilea loc gol pot fi ocupate doar de termeni care stau pentru oameni (= de sortul oamenilor), în timp ce al doilea poate fi ocupat doar de un termen de sortul mărfurilor. Atunci, o formalizare corespunzătoare a lui (19.1.1) va fi, de pildă,

(19.1.4) $(\forall v_1^{\ 1})\ (\exists v_1^{\ 2})\ C(v_1^{\ 1}, v_1^{\ 2}, c^{\ 1})$.

În genere, unui loc dintr-un predicat îi pot conveni termeni de mai mult de un sort; dar, pentru a simplifica, vom presupune mai jos că fiecare loc din fiecare predicat trebuie completat cu termeni de un singur sort.

Cerinţele de mai sus sunt suficiente pentru a construi formulele atomare ale limbajului *Ln*; construirea formulelor mai complexe nu pune probleme speciale, în afara faptului că trebuie să fim mereu atenţi la sortul variabilelor folosite.

E important de reţinut aici faptul următor: o expresie ca $C(v_1^{\ 1}, v_2^{\ 1}, c^{\ 1})$ nu e, potrivit strategiei urmate acum, o formulă bine formată a lui *Ln*. Ea este exclusă pe considerente *sintactice*; nu avem cum spune că, relativ la un model, ei i se poate atribui o valoare. La fel, (19.1.3) va fi *nu falsă*, ci *lipsită de sens*.

Să ne amintim acum de logica de ordinul doi, discutată în § 16. Într-o anumită măsură, logica de ordinul doi ar putea fi considerată ca o logică specială multisortată (de fapt, bisortată). Vom relua câteva expresii ale acelei logici. De exemplu, expresia

(19.4) $(\exists X)\ (\forall v)\ (X(v) = v)$

spune că există o funcţie identitate; expresia

(19.5) $(\forall v)\ (\forall v')\ (\exists X)\ (X(v) \cdot X(v'))$

spune că orice două obiecte au cel puţin o proprietate în comun. Cele două principii ale identităţii sunt exprimabile de asemenea în această logică:

(19.6.1) (*Principiul identităţii indiscernabililor*)

$(\forall v)\ (\forall v')\ ((\forall X)\ (X(v) \leftrightarrow X(v')) \rightarrow v = v')$

(19.6.2) (*Principiul indiscernabilităţii identicilor*)

$(\forall v)\ (\forall v')\ (v = v' \rightarrow (\forall X)\ (X(v) \leftrightarrow X(v'))$

Se vede uşor deja din aceste patru expresii că am utilizat două sorturi de variabile: unele pentru obiecte individuale, altele pentru proprietăţi ale acestora. Pentru a face evident acest lucru, am putea, bunăoară, să modificăm pe (19.5) în:

(19.5.1) $(\forall v^{\ 1}_1)\ (\forall v^{\ 1}_2)\ (\exists v^{\ 2}_1)\ (v^{\ 2}_1(v^{\ 1}_1) \cdot v^{\ 2}_1(v^{\ 1}_2))$

Dar aceasta nu este încă o expresie a unei logici multisortate. Într-adevăr, într-o logică multisortată variabilele de diferite sorturi umplu locurile goale într-un predicat; dar aici, în expresia $v_1^{\,2}(v_1^{\,1})$ să zicem, variabila $v_1^{\,2}$ stă în locul unui predicat.

De aceea, pentru a construi logica de ordinul doi ca o logică multisortată, vom proceda astfel: fie L limbajul în care am construi logica de ordinul întâi. Construim un nou limbaj L_2 bisortat după cum urmează:

(i) pentru fiecare constantă individuală c a lui L, în L_2 există o constantă c^1;

(ii) pentru fiecare literă predicativă P a lui L, în L_2 există o constantă $c_P^{\,2}$;

(iii) pentru fiecare număr n, în L_2 introducem un predicat $n + 1$-ar – A^n (predicatul aplicabilității);

(iv) pentru fiecare simbol funcțional f al lui L există în L_2 un simbol funcțional f^1.

În formalizarea lui L_2 se folosesc două sorturi de variabile, cele individuale: $v_1^{\,1}$, $v_2^{\,1}$ etc. și cele predicative: $v_1^{\,2}$, $v_2^{\,2}$ etc. Acum comstruim o traducere H a termenilor și a formulelor lui L în termenii și, respectiv, formulele lui L_2

a) Construcția termenilor lui L_2:

(i) dacă t este o constantă individuală, atunci $H(t) = c^1$;

(ii) dacă t este o variabilă individuală v, atunci $H(v) = v^1$;

(iii) dacă t este o variabilă predicativă X, atunci $H(X) = v^2$;

(iv) dacă t este o constantă funcțională f, atunci $H(t) = f^1$;

(v) dacă t este $t(t_1, \ldots t_n)$, atunci $H(t) = H(t)\ (H(t_1) \ldots H(t_n))$.

b) Traducerea formulelor lui L:

(i) $H(t_1 = t_2)$ este $H(t_1) = H(t_2)$;

(ii) dacă P este un predicat n-ar, atunci

$H(P(t_1, \ldots t_n) = A^{n+1}(c_P^{\,2}, H(t_1), \ldots H(t_n))$;

(iii) $H(\neg\varphi) = \neg H(\varphi)$;

(iv) $H(\varphi \rightarrow \psi) = H(\varphi) \rightarrow H(\psi)$;

(v) $H(\forall\ v)\varphi) = (\forall\ v^1)H(\varphi)$;

(vi) $H(\forall\ X)\varphi) = (\forall\ v^2)H(\varphi)$.

Elementul interesant este, desigur, punctul (ii) al acestei ultime definiții. Predicatele A^n sunt astfel încât primul loc nu poate fi ocupat decât de o constantă sau o variabilă de ordinul doi (cel „predicativ"), iar celelalte locuri nu pot fi ocupate decât de termeni de sortul întâi (cel „individual"). De aceea, expresii ca $A^2(c_1^{\,1}, c_2^{\,1})$ sau $A^2(c_1^{\,2}, c_2^{\,2})$ sunt prost construite sintactic. Să luăm propoziția:

(19.7) Socrate este filozof.

In L_2 ea e formalizată astfel: i) se introduce o constantă c^1 ca nume pentru individul Socrate; ii) se introduce o constantă c^2 ca nume pentru predicatul filosof; iii) se introduce predicatul A^2. Acum, (19.7) devine:

(19.7.1) $A^2(c^2, c^1)$

pe care o citim: predicatul filosof se aplică individului Socrate.

Existența constantelor (și a variabilelor) de sorturi diferite are următoarea consecință semantică: domeniul unui model pentru *Ln* trebuie împărțit în *n* subdomenii, astfel încât constantele de sortul *i* să fie interpretate în subdomeniul *i*, iar cuantificatorii aplicați unei variabile de sortul *i* să vizeze doar subdomeniul *i*. Într-un fel, modelul nu mai e de forma $M = < D, \ldots >$, ci de forma $M = < D_1, \ldots D_n, \ldots >$.

Cum am văzut în § 16, logica de ordinul doi are anumite proprietăți remarcabile. În ea cad teoremele Löwenheim-Skolem, de compactitate și de completitudine. Se păstrează aceste rezultate și pentru traducerea ei în L_2? Altfel zis, încalcă logica bisortată L_2 construită mai sus compactitatea și teoremele Löwenheim-Skolem? Cum vom arăta mai jos, răspunsul e negativ. Se demonstrează că

(19.8) Relativ la L_2 se pot proba:

a) teoremele Löwenheim-Skolem;

b) teorema de compactitate;

c) teorema de completitudine.

Rezultatul acesta nu trebuie să ne surprindă odată ce observăm că în semantica pentru L_2 apelăm la predicatele de aplicabilitate, A^n: în acea semantică, noi nu avem entități (indivizi) și proprietățile lor – ca în semantica logicii de ordinul doi – ci *simularea* lor cu ajutorul a două genuri de entități și a relațiilor de aplicabilitate între acestea. Dacă între logica de ordinul doi și logica bisortată construită apar discrepanțe, aceasta nu înseamnă decât că simularea nu e perfectă, că deci înțelesul intuitiv al relațiilor A^n nu e captat în întregime de axiome și că în logica L_2 pot fi justificate *numai* acele inferențe care depind de cerințele pe care le putem impune explicit asupra relațiilor A^n.

b) *Cuantificarea restrânsă.* Să luăm următoarele două propoziții:

(19.9.1) Toți filosofii sunt inteligenți.

(19.9.2) Unii elevi sunt sportivi.

Ele se formalizează foarte ușor prin:

(19.9.1') $(\forall\ v)(F(v) \rightarrow I(v))$

(19.9.2') $(\exists\ v)(E(v) \cdot S(v))$.

Vom spune că $(\forall\ v)$ este *restrâns* la $F(v)$ în (19.9.1´) şi că $(\exists\ v)$ este restrâns la $E(v)$ în (19.9.2´). În general, dacă φ e o formulă cu o singură variabilă liberă v, vom spune că $(\forall\ v)$ e restrâns la $\varphi(v)$ în formula $(\forall\ v)(\varphi(v) \rightarrow ...)$ şi că $(\exists\ v)$ e restrâns la $\varphi(v)$ în $(\exists\ v)\ (\varphi(v) \cdot ...)$.

Cuantificarea restrânsă e folositoare atunci când într-o expresie sunt menţionate entităţi de diferite sorturi, de pildă oameni şi mărfuri, ca în (19.1.1). Pentru a formaliza aceste expresii, potrivit strategiei cuantificării restrânse trebuie procedat în felul următor. Mai întâi, se introduc predicate speciale pentru fiecare din sorturile de entităţi menţionate; apoi se foloseşte restrângerea cuantificatorilor. De exemplu, pentru a formaliza pe (19.1.1) trebuie introduse – în afara predicatului ternar C: a cumpăra – încă două predicate: P (pentru *persoană*) şi M (pentru *marfă*). Atunci, în locul lui (19.1.2) vom avea:

(19.1.5) $(\forall\ v)(P(v) \rightarrow (\exists\ v´)(M(v´) \cdot P(c) \cdot C(v, v´, c)))$

În formula de mai sus, cuantificatorul $(\forall\ v)$ este restrâns la $P(v)$, iar cuantificatorul $(\exists\ v)$ este restrâns la $M(v´)$.

Să luăm acum propoziţia:

(19.1.6) Orice om de pe strada noastră a cumpărat ceva de la Ionescu.

Apelăm la predicatul S: a locui pe strada noastră şi formalizăm:

(19.1.6´) $(\forall\ v)(P(v) \cdot S(v) \rightarrow (\exists\ v´)(M(v´) \cdot P(c) \cdot C(v, v´, c)))$

Acum cuantificatorul $(\forall\ v)$ e restrâns la $P(v) \cdot S(v)$. Pentru a evidenţia mai bine acest lucru, e folositor să folosim următoarea notaţie: vom scrie $(\forall\ v)^{\varphi(v)}$ în loc de $(\forall\ v)(\varphi(v) \rightarrow ...)$ şi $(\exists\ v)^{\varphi(v)}$ în loc de $(\exists\ v)(\varphi(v) \cdot ...)$. Atunci vom putea scrie:

(19.10.1) $(\forall\ v)^{I(v)}\ I(v)$

(19.10.2) $(\exists\ v)^{E(v)}\ S(v)$

(19.10.3) $(\forall\ v)^{P(v)}\ (\exists\ v´)^{M(v´)}\ (P(c) \cdot C(v, v´, c))$

(19.10.4) $(\forall\ v)^{P(v) \cdot S(v)}\ (\exists\ v´)^{M(v´)}\ (P(c) \cdot C(v, v´, c))$

în loc de (19.9.1´), respectiv (19.9.2´), (19.1.5), (19.1.6´).

Procedura aceasta are consecinţe diferite de cea a logicilor multisortate. Astfel, semantic nu mai e nevoie să împărţim domeniul unui model în subdomenii: domeniul va cuprinde entităţi de toate sorturile de care e nevoie. În al doilea rând, condiţiile sintactice asupra construirii expresiilor se relaxează: locurile goale într-un predicat pot fi completate cu variabile ori constante pentru orice obiect. De pildă, dacă c_1 e un nume pentru Olt, iar c_2 un nume pentru Lună, atunci propoziţia (19.1.2) se va formaliza

(19.1.2´) $P(c_1) \cdot M(c_2) \cdot P(c) \cdot C(c_1, c_2, c)$

Potrivit strategiei logicilor multisortate, (19.1.2´) este fără sens – o expresie gramatical prost construită, căci cuprinde pe $C(c_1, c_2, c)$. Potrivit strategiei cuantificării restrânse, ea este cu sens; dar nu e adevărată, fiindcă $P(c_1)$ şi $M(c_2)$ nu sunt adevărate.

Observăm că, pentru a pune la lucru strategia cuantificării restrânse, trebuie să introducem noi constante predicative în limbaj, câte un predicat unar pentru fiecare sort. Acest lucru ne permite să obţinem unele rezultate foarte importante. Fie L_n un limbaj multisortat, iar L_n un limbaj de ordinul întâi definit în felul următor:

(i) dacă P este o constantă predicativă din L_n, atunci P este o constantă predicativă în L_n;

(ii) pentru fiecare sort i, în L_n există un predicat S_i;

(iii) pentru fiecare termen individual t de sortul i, în L_n există un termen t.

Putem să traducem orice formulă φ a lui L_n într-una $H(\varphi)$ a lui L^n, în felul următor:

(i) dacă φ e o expresie atomară de forma $t_1 = t_2$ şi în t_1 şi t_2 apar termenii constanţi $t_{i\ 1}$, ... t_{im}, având sorturile φ_i, ... φ_m, atunci $H(\varphi)$ este $t_1 = t_2 \cdot \cdot S_{j\ 1}(t_{i\ 1}) \cdot S_{jm}(t_{im})$;

(ii) dacă φ e o expresie atomară de forma $P(t_1, \ldots t_n)$ şi în φ apar termenii constanţi $t_{il} \ldots t_{im}$ având sorturile φ_i, ... φ_m, atunci $H(\varphi)$ este $P(t_1, \ldots t_n) \cdot \cdot S_{j\ 1}(t_{i\ 1}) \cdot \ldots S_{jm}(t_{im})$;

(iii) $H(\neg \varphi) = \neg H(\varphi)$;

(iv) $H(\varphi \rightarrow \psi) = H(\varphi) \rightarrow H(\psi)$;

(v) $H((\forall\ v^i)\varphi) = (\forall\ v^i)(S_i(v^i) \rightarrow \varphi)$;

(vi) $H((\exists\ v^i)\varphi) = (\exists\ v^i)(S_i(v^i) \cdot \varphi)$.

Trebuie notat că în L^n variabilele nu sunt de sorturi diferite; indicii superiori ai variabilelor, care în L_n foloseau pentru a le indica sortul, acum servesc numai pentru a diferenţia între două variabile diferite.

Urmează cele mai importante rezultate privitoare la relaţia dintre logica multisortată şi logica cuantificaţional restrânsă.

(19.11) O propoziţie φ este demonstrabilă în L_n ddacă traducerea ei $H(\varphi)$ este demonstrabilă în L^n.

(19.12) O mulţime Σ de propoziţii ale lui L_n este consistentă în L_n ddacă $H(\Sigma)$ – mulţimea traducerilor în L^n ale acestor propoziţii – este consistentă în L^n.

Teoremele de mai sus conduc imediat la demonstrarea lui (19.8). Pentru aceasta trebuie să ţinem cont că propoziţiile limbajului bisortat L_2 se traduc în propoziţii ale unui limbaj de ordinul întâi L^2, pentru care teoremele lui Löwenheim-Skolem, de compactitate şi de completitudine au loc.

§ 20. Descripţiile

Pentru a vorbi despre obiecte, se folosesc *termenii*. În § 10 s-a introdus definiţia termenilor într-un limbaj L de ordinul întâi. O reamintesc:

(10.1) Definiţia termenilor lui L:

a) o variabilă este un termen;

b) un simbol constant din L este un termen;

c) dacă F este un simbol funcţional m-ar din L şi t_1, ... t_m sunt termeni, atunci $F(t_1, \ldots t_m)$ este un termen;

d) un şir de simboluri logice sau ale lui L este un termen dacă şi numai dacă se poate obţine prin aplicarea de un număr finit de ori a clauzelor (a) – (c).

Desigur, variabilele individuale nu denotă într-un model anumite obiecte particulare; ideea introducerii lor a fost tocmai aceea de a le folosi pentru a denota obiecte diferite. Potrivit definiţiei funcţiei de interpretare, în orice model fiecare constantă individuală denotă un obiect precizat; ea denotă întotdeauna şi denotă un singur obiect. Rolul constantelor individuale într-un limbaj de ordinul întâi este asemănător cu cel al *numelor proprii* în limbile naturale. Filosofi precum Frege şi Russell au argumentat că numele proprii nu pot să nu denote; în acelaşi timp, fiind „proprii", aceste nume denotă un singur obiect.

Dacă însă numele proprii ar fi singurele mijloace de care am dispune pentru a vorbi despre obiecte particulare, ar fi imposibil să facem acest lucru dacă nu am şti numele obiectelor; dar desigur că, de multe ori, vrem – şi reuşim – să vorbim despre obiecte chiar dacă nu cunoaştem cum au fost botezate. Aşa ceva se întâmplă pentru că, alături de nume proprii, în limbajele pe care le folosim avem la îndemână şi alte genuri de expresii care denotă obiectele particulare. E vorba de cele construite cu ajutorul simbolurilor funcţionale. Să luăm câteva exemple de astfel de simboluri funcţionale:

(20.1.1) Oraşul care este capitala...

(20.1.2) Acel număr natural care este suma dintre numerele naturale... şi ...

(20.1.3) Soţia lui ...

(20.1.4) Soţia primului preşedinte al statului...

În primul, al treilea şi al patrulea exemplu apar simboluri funcţionare *unare:* punând în locurile goale un termen, se obţine un termen. De pildă, avem (în cel de-al treilea exemplu):

(20.2.1) Soţia lui Elvis Presley

(20.2.2) Soţia lui M. Gorbaciov

(20.2.3) Soţia lui I. Kant

(20.2.4) Soţia primului preşedinte al U.R.S.S.

Cel de-al patrulea exemplu este mai interesant, căci în el apar două simboluri funcţionale, anume: „soţia lui..." şi „primul preşedinte al..."; dacă în celelalte două exemple considerate termenii obţinuţi erau de forma $F(t)$, în acesta toţi termenii sunt de forma $F(F'(t))$. (Astfel de termeni pot fi obţinuţi şi în cazul în care avem un singur simbol funcţional, punând în locul liber un termen complex, cum se vede în expresia (20.2.4)).

În al doilea exemplu avem un simbol funcţional cu două locuri goale. În cel de-al cincilea nu avem nici un loc gol; desigur, expresia „primul om care a păşit pe..." este un simbol funcţional unar, însă „primul om care a păşit pe Lună" este deja un termen constant. Am putea spune, forţând puţin, că acesta este un simbol funcţional 0-ar, sau cu zero locuri goale.

În termeni precum cei construiţi aici, alături de constante individuale, apar expresii predicative (precum: „... este soţia lui..."; „... este preşedinte al..."; „... este om care a păşit pe Lună" etc.), care pot fi compuse; de asemenea, în aceşti termeni este utilizat articolul hotărât (când scriem: soţi*a* lui..., preşedinte*le*..., oraş*ul* care... etc.). Astfel de termeni se numesc *descripţii definite* (sau, pe scurt: *descripţii*). În cele ce urmează nu vom admite ca într-o descripţie definită să apară variabile libere. Pentru a evidenţia structura unei descripţii – deci faptul că ea cuprinde 1) o expresie predicativă; 2) articolul hotărât; 3) eventual, constante individuale – vom folosi următoarea notaţie: introducem *iota operatorul,* care, precum cuantificatorii universal şi existenţial, se aplică unei variabile şi este urmat de o expresie predicativă unară. Descripţii vor fi, de pildă, $(\iota\, v)\, P(v)$, $(\iota\, v)\, R(c, v)$, $(\iota\, v)(P(v) \cdot Q(c, v))$ etc., prin care formalizăm, să zicem: „cel mai cunoscut actor francez", respectiv „soţia lui M. Gorbaciov", „cel mai cunoscut actor francez care a turnat filme la Hollywood". Să observăm, în fine, că, întrucât sunt termeni, descripţiile pot apărea printre argumentele unui predicat n-ar la fel ca o variabilă sau o constantă individuală.

Cu ajutorul descripţiilor putem obţine propoziţii precum:

(20.3.1) $R((\iota\, v)\, P(v))$	Primul preşedinte al U.R.S.S. este chel
(20.3.2) $c = (\iota\, v)\, P(v)$	M. Gorbaciov este primul preşedinte al U.R.S.S.
(20.3.3) $(\iota\, v)\, P(v) = (\iota\, v)\, Q(v)$	Primul preşedinte al U.R.S.S. este iniţiatorul perestroicii.
(20.3.4) $(\exists\, v)(\exists\, v)\ (R'(v) \cdot R''(v, (\iota\, v')\, P(v')))$	– Unii ruşi îl admiră pe primul preşedinte al U.R.S.S.
(20.3.5) $c' = (\iota\, v)\, S(v, (\iota\, v')\, P(v'))$	Raisa Gorbaciova este soţia primului preşedinte al U.R.S.S.

(Pentru a simplifica, am scris $(\iota v)\ P(v)$ pentru: primul preşedinte al U.R.S.S.; mai corect ar fi fost, desigur, să scriem $(\iota v)\ P(v, b)$ cu b o constantă individuală).

Nu vom insista mai mult asupra aspectelor sintactice; sintactic, descripţiile definite sunt un gen de termeni complecşi – iar în § 10 felul în care se pot folosi aceştia în expresiile unui limbaj de ordinul întâi a fost definit în chip riguros. Să trecem acum la aspectele semantice. Fie deci o descripţie $(\iota v)\ P(v)$. Într-un model M vom interpreta această descripţie ca un obiect al domeniului D al lui M, şi anume ca acel unic obiect x care face adevărată formula $P(v)$. Vom scrie:

(20.4) Interpretarea descripţiei $(\iota v)\ P(v)$ în modelul M este acel unic obiect $x \in D$ astfel încât $M \models P(v)\ ((x))$.

Există totuşi o problemă cu această definiţie. În § 11, când am definit *valoarea* unui termen t, am admis întotdeauna că acesta există: valoarea lui t e, prin definiţia (11.1), un obiect din domeniul oricărui model. Dar, dacă extensiunea lui P la M nu este un *singur* obiect, definiţia (20.4) nu mai reuşeşte să ne spună cum să interpretăm pe $(\iota v)\ (P(v)$ la M. Apoi, este întrutotul posibil ca o descripţie să nu aibă nici o interpretare într-un model. Să presupunem că în limbajul L avem descripţii precum:

(20.5.1) Soţia lui I. Kant

(20.5.2) Muntele de aur

(20.5.4) Soţia lui Henric al VIII-lea.

Dacă modelul pe care îl avem în vedere este o parte a lumii actuale atunci evident că, potrivit lui (20.4), aceste descripţii sunt nedefinite: nu putem afla un *unic* obiect prin care să interpretăm în acest model descripţia (în primele două exemple, nu există nici un astfel de obiect; în al treilea – există mai mult de un obiect).

Acum să luăm propoziţiile:

(20.6.1) Soţia lui I. Kant era scundă.

(20.6.2) Muntele de aur este înalt.

(20.6.3) Regele de astăzi al Franţei este chel.

(20.6.4) Anne Bullen a fost soţia lui Henric al VIII-lea.

Primele trei sunt de forma lui (20.3.1): $R\ (\iota v)\ P(v))$, iar a patra e de forma lui (20.3.2): $c = (\iota v)\ P(v)$. Cum nu există în nici unul din aceste cazuri un unic obiect în model care satisface pe P, înseamnă că nu vom putea determina pentru propoziţiile ca întreg valoarea lor de adevăr. Propoziţiile (20.6) nu vor fi nici adevărate şi nici false. În acest caz însă, unele propoziţii ale limbajului nu ar avea o valoare de adevăr în unele modele (în acelea în care descripţiei nu îi corespunde un unic obiect din domeniu).

Această situaţie nu este deloc fericită; odată admisă, ar trebui să ne lipsim de unele dintre cele mai puternice instrumente folosite în teoria modelelor (un

exemplu: nu s-ar mai putea construi modelele canonice pentru demonstraţiile de completitudine). Dificultatea se poate totuşi ocoli; iată mai jos trei strategii în acest sens.

1. *Strategia lui A. Meinong.* Ea constă în următoarele: denotatul descripţiei (ι *v*) *P(v)* în modelul *M* este acel unic obiect *x*, astfel încât *M* ⊨ *P(v)* ((*x*)); dacă nu există un astfel de obiect, atunci modelul *M* se modifică adăugând domeniului un obiect x_p, astfel încât *P* este unic satisfăcut în *M* de x_p. De pildă, dacă (ι *v*) *P(v)* este descripţia *muntele de aur* şi ea nu are o interpretare unică în modelul *M*, atunci se adaugă domeniului *D* un unic obiect – muntele de aur. Atunci pentru *P* (= munte de aur) condiţia (20.4) e implicită. Şi tot aşa se adaugă câte un obiect în domeniu pentru fiecare descripţie – soţia lui Kant, regele de astăzi al Franţei etc.

Elaborarea în amănunţime a strategiei lui Meinong este însă foarte dificilă şi nu vom putea să insistăm aici mai mult asupra ei; în ultimii ani au fost dezvoltate semantici meinongiene, însă relativ la limbaje logice mai bogate (aşa-numitele limbaje intensionale). Iată doar trei dificultăţi cărora trebuie să le facă faţă acestea. Mai întîi, strategia lui Meinong e prea îngăduitoare cu entităţile pe care le admitem ca obiecte în ontologie. Cum ea se aplică oricărei descripţii, ar trebui să adăugăm în *D* nu numai obiecte precum muntele de aur, soţia lui I. Kant ori regele de astăzi al Franţei, ci şi obiecte precum pătratul rotund, ori cel mai mare număr natural – care sunt imposibile, nu doar neactuale. Într-adevăr, dacă notăm cu *P* proprietatea a fi pătrat, iar cu *R* – proprietatea a fi rotund, atunci, potrivit strategiei meinongiene, spre a satisface propoziţia (20.4) relativ la descripţia (ι *v*) (*P(v)* · *R(v)*), ar trebui să adăugăm în domeniul fiecărui model *M* un obiect: pătratul rotund. Însă e greu de admis că există astfel de obiecte; şi e, de asemenea, greu de văzut cum ar putea fi manevrate acestea. Cea de a doua dificultate vizează chiar acest lucru. Strategia lui Meinong este, aşa cum am văzut, o cale de a păstra putinţa de a ataşa o valoare de adevăr oricărei propoziţii ce conţine o descripţie fără denotat. Dar se pare că preţul plătit e prea mare. Într-adevăr, s-ar putea argumenta în felul următor: orice propoziţie de forma „Obiectul care este *P* şi *S* este *P*" este adevărată, de pildă: „Cartea roşie este roşie". Dar atunci ar trebui ca propoziţiile

(20.7.1) Pătratul rotund este rotund.

(20.7.2) Pătratul rotund este pătrat

să fie adevărate în orice model. Însă cum a fi rotund şi a fi pătrat sunt proprietăţi incompatibile, din (20.7.1) decurge că propoziţia

(20.7.3) Pătratul rotund nu este pătrat

va fi adevărată în orice model. Or, ar trebui să admitem, în acest caz, că există o propoziţie φ astfel încât pentru orice model M am avea $M \models \varphi$ şi $M \models -\varphi$, ceea ce nu e acceptabil.

O a treia dificultate porneşte de la observaţia următoare: să presupunem că P este predicatul munte de aur. Construim acum descripţia $(\iota\, v)P(v)$: „muntele de aur". Potrivit strategiei lui Meinong, vom adăuga modelului M, în care descripţia nu are denotat unic, un obiect x_p – muntele de aur. Problema este însă aceasta; acum în M va fi adevărată propoziţia $(\iota\, v)\, P(v)$. De pildă, în modelul M care e inclus în lumea actuală – şi în care „muntele de aur" nu are denotat – va fi adevărat că există un obiect care e munte de aur. Or, acest lucru nu e acceptabil.

Soluţia lui Meinong este aceea de a strânge toate aceste obiecte nou adăugate domeniului D al modelului M într-o colecţie D' (să o numim *domeniul extern* al lui M) şi de a reinterpreta cuantificatorii în sensul că $(\exists\, v)\, Q(v)$ e adevărată dacă există un obiect în D (să îl numim *domeniul intern* al lui M) care satisface predicatul Q, dar nu e adevărată dacă acel obiect e în domeniul extern; tot aşa $(\forall\, v)\, Q(v)$ va fi adevărată dacă Q e satisfăcută de toate obiectele din domeniul intern. Obiectele din domeniul extern nu au statutul ontologic de a exista în M; Meinong zicea că astfel de obiecte trebuie într-un fel presupuse ca fiind – şi acest lucru e realizat prin construcţia domeniului extern. Dar ele nu există – au un alt statut ontologic.

Totuşi, această procedură naşte câteva observaţii critice. Unii filosofi – precum Quine – au argumentat ca atari obiecte cuprinse în domeniul extern nu sunt filosoficeşte „respectabile", şi aceasta pentru că în cazul lor nu avem criterii clare de identitate. Pe ce temei putem spune că regele de astăzi al Franţei nu este acelaşi individ ca şi regele de astăzi al Italiei? Căci poate că în acel tărâm în care aceştia există Italia şi Franţa s-au unit sub acelaşi cârmuitor!

În al doilea rând, chiar Meinong a susţinut că obiecte precum regele de astăzi al Franţei sunt „incomplete", adică nu e adevărat că, oricare ar fi proprietatea P, ele au fie P fie non-P. Într-adevăr, despre regele de astăzi al Franţei nu ştim dacă are ochii căprui sau nu; pur şi simplu propoziţia:

Regele de astăzi al Franţei are ochii căprui

este indeterminată – nu avem cum decide nici dacă e adevărată şi nici dacă e falsă. Însă nu putem da seama de aceasta în semantica folosită aici, fiindcă pentru orice propoziţie φ avem fie $M \models \varphi$, fie $M \models -\varphi$.

În al treilea rând, strategia lui Meinong conduce la admiterea faptului că ar exista relaţii „veritabile" între obiectele din domeniul intern şi cele din domeniul extern al unui model (deci, între obiectele „existente" şi cele „neexistente"). Într-adevăr, dacă în limbajul nostru există predicatul „mai înalt', atunci în M ar trebui ca propoziţia:

Regele de astăzi al Franţei este mai înalt decât regele de astăzi al Spaniei. să aibă o valoare de adevăr. Însă, intuitiv, noi considerăm mai degrabă că această propoziţie este indeterminată.

2. *Strategia lui G. Frege.* Ea constă în următoarele: oricare ar fi modelul *M*, domeniul său e construit astfel încât să includă un obiect x_0, numit *obiectul nul.* Acum, potrivit lui Frege denotatul descripţiei (ι *v*) *P(v)* în modelul *M* este acel unic obiect *x* astfel încât $M \models P(v)\ ((x))$; dacă nu există un astfel de obiect, atunci convenţional punem pe x_0 ca denotat al lui (ι *v*) *P(v)*, deci luăm pe x_0 ca unic obiect care satisface în *M* pe *P*.

Strategia lui Frege face şi ea ca în orice model orice descripţie să aibă un denotat; ea e folosită de multe ori în matematică, atunci când cerem ca o funcţie să fie definită pe o întregă mulţime. De pildă, dacă vrem ca scăderea $x - y$ să fie definită peste tot în *N*, punem convenţional $x - y = 0$ când $y \rangle x$. Desigur, această soluţie este convenţională, însă ea ajută la rezolvarea unor dificutăţi.

Orice propoziţie în care apare o descripţie poate fi acum tratată astfel încât ea să aibă o valoare de adevăr. De exemplu, propoziţia „Regele de astăzi al Franţei este chel" va fi adevărată într-un model *M* dacă x_0 aparţine extensiunii lui „chel" la *M*. Frege preferă ca x_0 să fie mulţimea vidă şi interpretează propoziţia de mai sus relativ la modelul *M* ca afirmând că mulţimea vidă este inclusă în extensiunea la *M* a lui „chel" – ceea ce este mereu adevărat.

Strategia lui Frege se bazează pe câteva teze. Le vom menţiona aici, pentru a face mai limpede diferenţele dintre acestea şi cea de a treia strategie pe care o vom menţiona – cea a lui B. Russell:

(i) Orice propoziţie este adevărată sau falsă.

(ii) Orice descripţie are întotdeauna denotat; descripţiile sunt tratate deci ca analoage numelor proprii.

(iii) Denotatul unei descripţii depinde exclusiv de structura acesteia (şi nu, eventual, de propoziţiile în care aceasta apare).

(iv) În formalizarea propoziţiilor în care apar descripţii trebuie păstrat rolul în care apar acestea. De pildă, dacă o propoziţie care gramatical are forma subiect-predicat are ca subiect o descripţie (ι *v*) *P(v)*, atunci prin formalizare trebuie să obţinem o propoziţie în care un simbol predicativ e aplicat acestei descripţii (e deci forma *R*((ι *v*) *P(v)*)).

Să luăm două exemple; fie mai întâi propoziţiile

(20.8.1) Mihail Gorbaciov este chel.

(20.8.1) Primul preşedinte al U.R.S.S. este chel.

În cele două propoziţii pare rezonabil să admitem că numele propriu *(Mihail Gorbaciov)* şi descripţia *(primul preşedinte al U.R.S.S.)* au aceeaşi funcţie sintactică: funcţia de subiect al predicatului *este chel* – deci că Meinong şi Frege

au dreptate să accentueze asupra analogiei dintre numele proprii şi descripţii. Dacă notăm expresia „Mihail Gorbaciov" cu *c*, expresia „primul Preşedinte al U.R.S.S." cu *c'* iar predicatul „este chel" prin *P*, cele două propoziţii vor fi formalizate prin *P(c)*, respectiv *P(c')*; ceea ce e important este că cele două propoziţii sunt privite ca având aceeaşi formă logică. Să luăm însă acum propoziţiile:

(20.9.1) Cineva este unicul autor al *Principiei Mathematica.*

(20.9.2) Nimeni nu este unicul autor al *Principei Mathematica.*

Cum *Principia Mathematica* a fost scrisă împreună de A. N. Whitehead şi B. Russell, intuitiv prima propoziţie este falsă, iar a doua e adevărată. Să vedem ce se întâmplă punând la lucru strategiile lui Meinong şi Frege de a trata descripţiile ca pe nişte nume proprii. Să notăm cu *c* descripţia „unicul autor al *Principiei Mathematica*". Formalizând, obţinem:

(20.9.1') $(\exists\ v)\ (v = c)$

(20.9.2') $-(\exists\ v)\ (v = c)$

Dar (21.9.1) este adevărată în orice model, iar (20.9.2') e falsă în orice model; prin formalizare am obţinut valori de adevăr pe dos faţă de cele pe care, intuitiv, le atribuiam celor două propoziţii. Formalizarea nu este, desigur, adecvată – iar lucrul acesta aruncă o oarecare îndoială asupra adecvării strategiilor lui Meinong şi Frege.

3. *Strategia lui B. Russell.* În articolul său *Despre denotare* apărut în 1905 în revista „Mind", B. Russell propune o cu totul altă modalitate de a aborda descripţiile. El păstrează teza (i) – că orice propoziţie este sau adevărată sau falsă (principiul bivalenţei) – însă le respinge pe celelalte trei. Respingând teza (ii), Russell susţine că nu orice descripţie are întotdeauna denotat; el consideră că intuiţia noastră nu e înşelătoare şi că (în modelul cuprins în lumea actuală) o descripţie precum „muntele de aur" sau „regele de astăzi al Franţei" efectiv nu are denotat. Pentru Meinong şi Frege, aceasta era doar o aparenţă; pentru Russell realmente atari descripţii nu au denotat. Descripţiile nu sunt, aşadar, pentru Russell analoage numelor proprii; expresiile denotative trebuie prin urmare împărţite în două mari clase: cele care pot fi tratate ca nume proprii şi cele care pot fi tratate ca descripţii. Prin urmare o descripţie nu poate fi formalizată apelând la o constantă individuală; traducerile propoziţiilor (20.9.1) şi (20.9.2) de felul celor de mai sus sunt greşite.

Respingerea tezei (iv) reprezintă renunţarea la teza că forma gramaticală şi forma logică „reală" a unei propoziţii se suprapun. Suntem înşelaţi, consideră şi Russell: dar nu de faptul că descripţia realmente are denotat, câtă vreme pare să nu aibă, ci de faptul că propoziţia pare să aibă descripţia drept constituent efectiv, câtă vreme forma logică a propoziţiei nu cuprinde descripţia drept constituent veritabil. Într-o propoziţie precum: „Primul preşedinte al U.R.S.S. este chel"

aparent subiectul este descripţia „primul preşedinte al U.R.S.S.". Dar nu e aşa, consideră Russell; în propoziţii precum

(20.10.1) Cineva a inventat un perpetuum mobile.

(20.10.2) Nimeni nu a pus piciorul pe Marte.

aparent expresiile „cineva" şi, respectiv, „nimeni" joacă rolul de subiecte. Însă desigur că aceasta e numai o aparenţă. În propoziţia

(20.10.3) Mihail Gorbaciov nu a pus piciorul pe Marte.

subiectul este realmente numele propriu „Mihail Gorbaciov". Dar putem spune

(20.11.1) Mihail Gorbaciov este obosit.

câtă vreme propoziţia

(20.11.2) Nimeni este obosit.

e absurdă. Că „nimeni" nu e subiectul real al lui (20.10.2) se observă îndată ce formalizăm această propoziţie într-un limbaj de ordinul întâi. Punând P pentru „a pus piciorul pe Marte", (20.10.1) devine

(20.10.2′) $(\forall\ v) - P(v)$

în care „nimeni" nu mai apare ca subiect; această expresie a fost analizată cu ajutorul cuantificatorilor.

Situaţia este analoagă, susţine Russell, cu descripţiile. Strategia lui Russell constă în a arăta cum putem analiza propoziţiile în care apar descripţiile ca propoziţii în care folosim numai cuantificatorii logicii standard a predicatelor. Atenţie: această înlocuire a *iota operatorului* cu o expresie cuantificaţională nu se face luând descripţia în izolare (cum cerea teza (iii)); metoda lui Russell e cea a *definiţiei contextuale:* el arată cum putem înlocui o *propoziţie* în care apare iota operatorul cu o altă propoziţie, în care apar numai cuantificatorii obişnuiţi. Aşadar, strategia lui Russell nu e cea a definiţiei *explicite* a iota operatorului: nu se dă nici o definiţie generală a acestuia.

Fie propoziţia:

(20.12) Regele de astăzi al Franţei este chel; formalizat: $P((\iota\ v)\ R(v))$,- în care apare descripţia $(\iota\ v)\ P(v)$: regele de astăzi al Franţei. Russell propune ca această propoziţie să fie analizată astfel: există un individ v care are următoarele trei proprietăţi:

a) v este astăzi rege al Franţei: $R(v)$;

b) nu există nici nu alt individ v' în afara lui v care are proprietatea de a fi astăzi rege al Franţei: $(\forall\ v')\ (R(v') \rightarrow v' = v)$

c) v este chel: $P(v)$.

Aceasta înseamnă că propoziţia (20.12) poate fi analizată în următoarea formulă a logicii predicatelor de ordinul întâi, în care nu mai apare iota operatorul:

(20.13) $(\exists\ v)\ (R(v) \cdot (\forall\ v')\ R\ (v') \rightarrow v' = v) \cdot P(v))$

În orice model M, (20.13) are o valoare de adevăr; în modelul inclus în lumea actuală, ea se întâmplă să fie falsă (cum se poate observa fără dificultate). Aşadar, teza (i) este păstrată de strategia lui Russell.

Să notăm că (20.13) este echivalentă în logica predicatelor cu următoarea expresie mai simplă:

(20.14) $(\exists\ v)\ ((\forall\ v')(R(v') \leftrightarrow v' = v) \cdot P(v))$

Cu aceasta putem formula următoarea definiţie (contextuală) russelliană a iota operatorului:

(20.15) $P((\iota\ v)R(v)) = df\ (\exists\ v)\ ((\forall\ v')\ (R(v') \leftrightarrow v = v') \cdot P(v))$

Să observăm că în definiensul lui (20.15) nu apare nici o expresie care să denote un individ regele de astăzi al Franţei. E drept, apare expresia predicativă: *rege de astăzi al Franţei;* însă aceasta nu este, evident, un termen! Ea poate fi satisfăcută de nici un individ, de un individ sau de mai mulţi indivizi; la orice model ea se interpretează nu ca un obiect, ci ca o *mulţime* (posibil vidă sau singulară) de obiecte. Aşadar, definiensul lui (20.15) nu cuprinde descripţia drept constituent.

De aici decurge o consecinţă foarte importantă: spre deosebire de strategiile lui Meinong şi Frege, cea a lui Russell nu pune nici o problemă specială pe plan semantic: căci analizând iota operatorul în terneni cuantificaţionali, nu apare nici o problemă de interpretare semantică. Prin urmare, nu e nevoie de utilizarea unei clauze de felul lui (20.4).

Până în prezent am avut în vedere doar propoziţii afirmative în care apar descripţii definite. Să considerăm însă o propoziţie precum:

(20.16) Regele de astăzi al Franţei nu este chel.

Cum am văzut, negaţia ei (20.12) este, potrivit strategiei lui Frege, adevărată într-un model M ori de câte ori descripţia „regele de astăzi al Franţei" nu are un unic denotat în M; ca urmare, (20.16) va fi falsă în toate acele modele în care descripţia nu are un unic denotat. Analiza pe care o oferă Russell propoziţiei (20.16) este mai subtilă. Aparent, arată el, propoziţia (20.15) este pur şi simplu negaţia lui (20.12): Regele de astăzi al Franţei este chel, şi prin urmare va fi adevărată în exact acele cazuri în care (20.12) este falsă. Russell ia însă propoziţia (20.16) ca ambiguă; sub o citire, valoarea ei de adevăr va fi diferită de cea a lui (20.12), dar sub o altă citire ea va putea avea aceeaşi valoare de adevăr ca şi (20.12).

Cele două modalităţi de a înţelege pe (20.16) sunt următoarele:

(20.16.1) Nu e cazul că există un unic individ care este rege al Franţei şi care este chel.

(20.16.2) Există un unic individ care este rege al Franţei şi care nu este chel.

Formal, avem, respectiv, expresiile:

(20.16.1′) – (∃ *v*) ((∀ *v*′) (*R*(*v*′) ↔ *v*′ = *v*) · *P*(*v*))

(20.16.2′) (∃ *v*) ((∀ *v*′) (*R*(*v*′) ↔ *v*′ = *v*) · – *P*(*v*))

Amândouă aceste formule pot fi obţinute din propoziţia (20.16): – *P*((ι *v*) *R* (*v*)) apelând la definiţia (contextuală) (20.15) a iota operatorului. În primul caz, aplicăm definiţia (20.15) expresiei *P*((ι *v*) *R* (*v*)) în (20.16): – *P*((ι *v*) *R* (*v*)); astfel, negaţia are în domeniul său de aplicare cuantificatorul existenţial, cum se vede de altfel din (20.16.1′). În cel de-al doilea caz, definiţia (20.15) se aplică însăşi expresiei – *P*((ι *v*) *R* (*v*)); de data aceasta, cuantificatorul existenţial are negaţia în domeniul său de aplicare. În terminologia lui Russell, potrivit primei citiri (exprimată în (20.16.1) şi formalizată în (20.16.1′)) a lui (20.16), negaţia este tratată ca având o *apariţie primară;* potrivit celei de a doua citiri (exprimată în (20.16.2) şi formalizată în (20.16.2′)) a propoziţiei noastre, negaţia este tratată ca având o *apariţie secundară.* Se observă uşor că propoziţia (20.12) este negaţia lui (20.16.1), dar nu şi a lui (20.16.2). În fapt, tratamentul aplicat de Russell face ca (20.12) şi (20.16.2) să poată fi împreună false (ceea ce de altfel se întâmplă în modelul inclus în lumea actuală).

Propoziţii ca (20.12): Regele de astăzi al Franţei este chel, în care apar descripţii care nu au un denotat unic, sunt – aşa cum am văzut – false. Aceste propoziţii nu încalcă teza (i) a bivalenţei şi, în acest sens, strategia lui Russell este încununată de succes. Însă, au argumentat unii autori, aici se află şi slăbiciunea ei.

Obiecţia lui K. Donnellan este aceea că inexistenţa denotatului unic nu garantează falsitatea propoziţiei. El consideră că atunci când analizăm o propoziţie de forma *P*((ι *v*) *R*(*v*)) sunt posibile două citiri ale acesteia: una *referenţială* şi una *atributivă.* Să luăm un exemplu. Presupunem că am ascultat la radio o piesă muzicală şi că afirmăm:

(20.17) Autorul acestei piese muzicale este genial.

Potrivit citirii referenţiale, sensul lui (20.17) este următorul:

(20.17.1) Există un unic individ care este autor al acestei piese muzicale şi care este genial.

Formal, avem, ca în obişnuita transcriere russelliană:

(20.17.1′) (∃ *v*) ((∀ *v*′) (*P*(*v*′) ↔ *v*′ = *v*) · *G*(*v*))

Prin (20.17.1) este selectat un individ (pe care îl denotă descripţia) şi i se atribuie acestuia o proprietate. Potrivit citirii atributive, sensul propoziţiei noastre iniţiale e însă cu totul altul:

(20.17.2) Acel individ care este autor al acestei piese muzicale, oricare ar fi el, este genial.

Formal, această propoziţie se transcrie cu totul altfel:

(20.17.2′) $(\forall\ v)\ ((\forall\ v')\ (P(v') \leftrightarrow v' = v) \rightarrow G(v))$

Dacă în citirea referenţială ne interesa să determinăm obiectul care e denotatul (unic) al descripţiei, în cea atributivă acest lucru nu ne mai interesează. Descripţia nu e folosită acum pentru a vorbi despre un *anumit* obiect; mai degrabă accentul e pus pe caracteristica avută de acel obiect care se întâmplă să fie denotatul descripţiei. Să presupunem că, ascultând piesa muzicală, am recunoscut autorul ei – pe J. S. Bach, de pildă. Când am afirmat pe (20.17) eu mă refeream la J. S. Bach, şi despre el comunicam ceva; propoziţia trebuie luată deci ca exprimând aceeaşi judecată ca şi (20.17.1). Dar să zicem că nu am recunoscut cine e autorul acelei lucrări. Când am afirmat pe (20.17) nu aveam prin urmare în vedere nici un individ anume. Spuneam însă că el trebuie să fie genial, dat fiind că acea lucrare avea caracteristicile pe care tocmai le remarcasem. Prin urmare, prin afirmaţia mea voiam să zic că autorul acelei lucrări – oricare ar fi el – în virtutea faptului că lucrarea are anumite caracteristici – e genial. Propoziţia (20.17) va exprima aceeaşi judecată ca şi (20.17.2).

Acum să presupunem că într-un model M descripţia $(\iota\ v)\ R\ (v)$ nu are nici un denotat. Propoziţia $P((\iota\ v)\ R\ (v))$ va fi falsă în M, potrivit citirii referenţiale. Dar nu se întâmplă acelaşi lucru potrivit citirii atributive: într-adevăr, când într-un model M predicatul P nu e satisfăcut unic, propoziţia (20.17.2′) devine adevărată în M.

P. F. Strawson a formulat o altă obiecţie la adresa strategiei lui B. Russell de analiză a descripţiilor. Atunci când analizăm o propoziţie precum

(20.18) Iniţiatorul perestroicii este chel.

în:

(20.18.1) Există un singur individ care a iniţiat perestroica şi care este chel.

existenţa acelui singur individ care are proprietatea de a fi iniţiat perestroica este *afirmată*. Dar, consideră Strawson, acest lucru nu e ceva cuprins în propoziţia noastră: mai degrabă el este *presupus* de către ea. Când cerem cuiva: „Închide fereastra!", *presupunem* că fereastra este deschisă, dar nu şi afirmăm acest lucru prin intermediul propoziţiei; iar dacă presupunerea nu e îndeplinită, atunci cererea de a închide fereastra este fără sens. Analog, existenţa unui unic denotat al descripţiei este o condiţie pentru ca propoziţia să fie adevărată sau falsă; dar dacă presupoziţia aceasta nu este împlinită, propoziţia nu va fi nici adevărată, nici falsă.

Potrivit lui Strawson (şi spre deosebire de Frage ori Russell) teza (i) nu este valabilă; unele propoziţii pot să nu aibă valoare de adevăr – anume, atunci când presupoziţiile lor nu sunt îndeplinite. Bunăoară, propoziţia (20.12): Regele de astăzi al Franţei este chel nu e nici adevărată şi nici falsă; astfel e şi propoziţia

(20.16): Regele de astăzi al Franței nu este chel – căci în ambele presupoziția existenței unei singure persoane care este rege al Franței nu este satisfăcută.

§ 21. Existenţa

În paragraful anterior am întâlnit deja unele dificultăţi ce apar atunci când vrem să manevrăm termeni singulari care nu au denotat. Acolo am cercetat diferitele strategii propuse în cazul în care termenii singulari consideraţi erau descripţii definite; dar nu am abordat şi cazul în care era vorba de nume proprii; mai mult, nici în cazul descripţiilor nu am încercat să vedem ce se întâmplă cu afirmaţiile (sau negaţiile) de existenţă. Să luăm câteva exemple:

(21.1.1) Regele de astăzi al Franţei există.

(21.1.2) Regele de astăzi al Franţei nu există.

(21.1.3) Pegas există.

(21.1.4) Pegas nu există.

(21.1.5) Tigrii bengalezi există.

(21.1.6) Tigrii bengalezi nu există.

O primă sugestie ar fi următoarea: să se trateze aceste propoziţii ca analoge propoziţiilor predicative; cele afirmative, de pildă, ar urma să fie tratate tot aşa precum, să zicem:

(21.2.1) Regele de astăzi al Franţei este chel,

respectiv

(21,2.3) Pegas este cal înaripat.

(21.2.5) Tigrii bengalezi sunt carnivori.

Interpretarea ar fi deci următoarea: când afirmăm că ceva există, îi atribuim o proprietate – existenţa; când negăm că ceva există, respingem că are proprietatea existenţei. Dacă notăm cu „$(\iota\ v)\ R(v)$" descripţia „regele de astăzi al Franţei", cu „c" numele „Pegas", cu „F" predicatul „tigru", cu „G" predicatul „bengalez", iar cu „H" predicatul existenţei, propoziţiile (21.1) se vor formaliza ca:

(21.1.1′) $H((\iota\ v)\ R(v))$

(21.1.2′) $\neg H((\iota\ v)\ R(v))$

(21.1.3′) $H(c)$

(21.1.4′) $\neg H(c)$

(21.1.5′) $(\forall\ v)\ ((F(v) \cdot G(v)) \rightarrow H(v))$

(21.1.6′) $\neg (\forall\ v)\ ((F(v) \cdot G(v)) \rightarrow H(v))$

(În cazul celei de a doua şi al celei de-a şaselea propoziţii putem produce, desigur, două formalizări, după cum interpretăm negaţia ca aplicându-se întregii propoziţii sau numai predicatului). Din nefericire însă, această încercare duce la dificultăţi. De pildă, din (21.1.4′) şi din legea logică

$\varphi(c) \rightarrow (\exists\ v)\ \varphi(v)$

obţinem propoziţia:

(21.3) $(\exists\ v) - H(v)$

care se citeşte: există ceva care nu există – ceea ce desigur că, în afară de meinongieni, puţini dintre noi suntem tentaţi să admitem. Dar să ne aplecăm asupra ultimelor două propoziţii. Dacă interpretăm negaţia ca aplicându-se întregii propoziţii, ca în (21.1.6´), atunci din (21.1.6´) se poate deduce cu uşurinţă (21.5) – ceea ce nu e prea de dorit. Dacă însă interpretăm negaţia ca aplicându-se doar predicatului, vom obţine drept formalizare a lui (21.1.6) pe

(21.1.6´´) $(\forall\ v)\ ((F(v) \cdot G(v)) \rightarrow - H(v))$

Necazul este că, dacă nu există tigri bengalezi, atunci atât (21.1.5´) cât şi (21.1.6´´) ar fi adevărate, căci antecedentul e mereu fals; însă tocmai acest lucru nu vrem să se întâmple. Dacă, mai departe, am încerca să formalizăm pe (21.1.5) ca:

(21.1.5´´) $(\exists\ v)\ (F(v) \cdot G(v) \cdot H(v))$

iar pe (21.1.6) ca

(21.1.6´´) $(\exists\ v)\ (F(v) \cdot G(v) \cdot - H(v))$

atunci din ambele se deduce că) $(\exists\ v)\ (F(v) \cdot G(v)$ – există tigri bengalezi – adică tocmai ceea ce (21.1.6) neagă.

Aceste dificultăţi sugerează că nu putem produce formalizarea în logica de ordinul întâi a predicatelor a aserţiunilor existenţiale într-un mod atât de direct. Existenţa nu pare să fie recuperabilă ca predicat. Să luăm şi următoarea propoziţie:

(21.4) Tigrii bengalezi sunt rari.

Nici aceasta, evident, nu poate fi formalizată ca o propoziţie predicativă: (21.4) nu afirmă că o proprietate – raritatea – se aplică fiecărui tigru bengalez. La fel ca raritatea, au sugerat unii filozofi, existenţa nu este o proprietate a obiectelor individuale. G. Frege şi B. Russell au admis acest lucru: potrivit lor, existenţa spune ceva nu despre obiecte, ci despre proprietăţile acestora. De pildă, propoziţia (21.1.5) spune că proprietatea de a fi tigru bengalez e astfel încât e satisfăcută de cel puţin un obiect. Dar a fi satisfăcut de cel puţin un obiect e o proprietate a unei proprietăţi, nu a unui obiect, tot aşa cum a fi rar nu e o proprietate a fiecărui tigru bengalez, ci a colecţiei lor. După Frege, aserţiunile existenţiale sunt numerice. De pildă, să luăm propoziţia:

(21.5.1) Există doi studenţi în clasă.

Deşi „doi" e un adjectiv ataşat predicatului „student", nu putem formaliza pe (21.5.1) ca:

(21.5.1´)) $(\exists\ v)\ (F(v) \cdot G(v)$

unde „F" stă pentru „doi", iar „G" pentru „student în clasă". Căci despre nici un om nu putem spune că are proprietatea de a fi „doi". Mai degrabă, „G" spune

ceva despre mulţimea studenţilor din clasă, anume că ea cuprinde doi membri. Fie propoziţia:

(21.5.2) Există cel puţin doi studenţi în clasă.

Dacă notăm cu „F" predicatul „student în clasă", (21.5.2) se formalizează uşor ca:

(21.5.2′) $(\exists\ v)\ (\exists\ v')\ (F(v) \cdot F(v') \cdot v \neq v')$

Pe de altă parte, propoziţia

(21.5.3) Există cel mult doi studenţi în clasă se poate formaliza astfel: dacă găsim trei oameni, care sunt studenţi în clasă, atunci am numărat unul de două ori. Adică:

(21.5.3′) $(\forall\ v)\,(\forall\ v')\,(\forall\ v'')\,((F(v) \cdot F(v') \cdot F(v'')) \rightarrow v = v' \vee v = v'' \vee v' = v'')$

Acum propoziţia (21.5.1) spune de fapt că:

(21.5.4) Exact doi studenţi sunt în clasă,

ceea ce se formalizează, desigur, prin conjuncţia lui (21.5.2′) şi (21.5.3′). Să trecem acum la (21.1.5). Ea spune, de fapt, că

(21.5.5) Există cel puţin un tigru bengalez.

Aceasta se formalizează uşor ca:

(21.5.5′) $(\exists\ v)\ (F(v) \cdot G(v))$

unde, ca mai sus, „F" stă pentru „tigru", iar „G" pentru „bengalez". Cuantificatorul existenţial spune că cele două predicate au în comun ceva: faptul că sunt satisfăcute deodată de cel puţin un obiect. Aşadar, cuantificatorul transmite o informaţie despre predicate (şi despre proprietăţile corespunzătoare lor). De pildă, formalizând propoziţia

(21.5.6) Există cel puţin un student în clasă

ca

(21.5.6′) $(\exists\ v)\ (F(v)$

cuantificatorul spune că predicatul „F" are proprietatea de a fi satisfăcut de cel puţin un obiect.

Dacă însă încercăm să aplicăm această strategie propoziţiei (21.1.3): Pegas există (ori lui 21.1.4), nu vom reuşi. Acest fapt l-a făcut pe Frege să declare că (21.1.3) şi (21.1.4) sunt fără sens: existenţa nu se poate cupla cu numele proprii. Să observăm încă un lucru. Fie numele propriu „Dumnezeu"; să punem „c" pentru acest nume. Potrivit legilor identităţii, avem

(21.1.6) $c = c$.

Dar de aici decurge, în logica de ordinul întâi:

(21.6.1) $(\exists\ v)\ (v = c)$

care spune că există ceva care este Dumnezeu – sau, mai pe scurt, că Dumnezeu există. De bună seamă că o atare procedură atât de simplă de a demonstra existenţa lui Dumnezeu ar stârni invidia chiar şi a susţinătorilor argumentului ontologic.

Cea mai uşoară cale de a bloca concluzia (21.6.1) e aceea de a nega, în stil russellian, că „Dumnezeu" este nume propriu – şi, deci, că în limbajul logicii de ordinul întâi îi corespunde o constantă individuală; „Dumnezeu" ar fi, de fapt, o descripţie deghizată, de forma $(\iota\ v)\ D(v)$ (acel v care este dumnezeu; am scris „dumnezeu" fără majusculă, tocmai pentru a indica faptul că aici această expresie este predicativă). Atunci (21.6.1) e de fapt

(21.6.2) $(\exists\ v')\ (v' = (\iota\ v)\ D(r))$

Potrivit teoriei descripţiilor a lui Russell, (21.6.1) se analizează în

(21.6.3) $(\exists\ v)\ (\forall\ v'')\ (D(v'') \leftrightarrow v'' = v) \cdot (\exists\ v')\ (v' = v))$

Or, această ultimă expresie de bună seamă că nu e lege logică şi deci nu poate fi dedusă din $(\iota\ v)\ D(v) = (\iota\ v)\ D(v)$

În paragraful anterior am văzut că B. Russell a conchis din faptul că unii termeni singulari nu au denotat că, de fapt, aceştia nu sunt termeni. Descripţiile sunt numai aparent constituenţi veritabili ai propoziţiilor; analizând aceste propoziţii, obţinem expresii în care descripţiile nu mai apar. La fel se întâmplă şi cu acele propoziţii în care apar nume proprii, de exemplu cu

(21.7.1) Pegas este cal cu aripi.

Aici „Pegas" e numai aparent un nume propriu; în realitate, el e o descripţie deghizată. Să considerăm şi următorul raţionament:

(21.8) Tudor Arghezi este Ion Teodorescu.
Andrei ştie că Tudor Arghezi este Tudor Arghezi.

Andrei ştie că Tudor Arghezi este Ion Teodorescu.

Raţionamentul (21.8) este invalid: el arată că nu putem substitui în contextul „Andrei ştie că" doi termeni coextensivi. În tradiţia russelliană, reacţia naturală va fi aceea de a nega că „Tudor Arghezi" şi „Ion Teodorescu" sunt de fapt nume. Dificultatea care apare aici – şi care ne solicită să negăm caracterul de a fi termen al unei expresii – nu e lipsa denotatului, ci coextensivitatea. Or, cum avem foarte puţină garanţie că o expresie care gramatical are forma unui nume propriu scapă celor două defecte, simţim foarte puternic presiunea de a susţine că nici o expresie a limbii naturale (a limbii române în particular) poate fi redată ca o constantă într-un limbaj de ordinul întâi. Quine a cedat acestei presiuni. După el, toate propoziţiile în care apar nume proprii trebuie analizate după calapodul celor ce conţin descripţii. Să luăm, bunăoară, propoziţia (21.7.1): Pegas este cal cu aripi. După Quine, expresia „Pegas" e în realitate o descripţie: „acel v care pegasizează"; prin urmare (21.7.1) se poate formaliza ca:

(21.7.1') $C((\iota\ v)\ P(v))$

Să notăm că strategia lui Quine depinde de ipoteza că pentru orice nume se poate găsi o expresie predicativă care selectează unic referentul său. S. A. Kripke

a argumentat însă cu deosebită forţă împotriva acestei ipoteze: după el, numele nu pot fi înlocuite cu descripţii sau cu mănunchiuri de descripţii. Dar chiar dacă s-ar depăşi această obiecţie, rămâne încă o dificultate. Intuitiv, noi considerăm că propoziţia (21.7.1) este adevărată, în timp ce

(21.7.2) Pegas este crocodil.

e falsă. Or, potrivit strategiei lui Quine, (21.7.2) se poate formaliza ca

(21.7.2′) $K((\exists\ v)\ P(v))$

Analizând propoziţiile (21.7.1′) şi (21.7.2′), vedem că amândouă sunt false – ceea ce sigur că nu corespunde intenţiilor noastre.

Dificultăţi precum cele menţionate aici pun o problemă gravă în faţa încercării de a formaliza propoziţiile şi raţionamentele din limba naturală în limbaje de ordinul întâi. Atât în limba română cât şi în limbajele de ordinul întâi există termeni singulari; dar, cum am văzut, nu putem pune cu uşurinţă în corespondenţă aceste categorii de expresii. Reacţiile filosofilor în faţa unei astfel de situaţii pot fi foarte diverse. Ele constau în acomodarea filosofiei lor a limbajului la dificultăţile de felul celor menţionate. La o extremă se plasează cei ce adoptă o perspectivă „pragmatică" faţă de chestiunea reprezentării termenilor singulari din limbile naturale în limbajele de ordinul întâi; la cealaltă extremă se aşază filosofii care susţin un punct de vedere „metafizic".

Pentru aceştia din urmă, e în afară de orice îndoială faptul că în limbile naturale există termeni singulari care se întâmplă să nu denote. Însă această împrejurare are semnificaţie logică: căci termenii singulari din limba naturală sunt termeni care năzuie să denote un obiect (chiar dacă uneori încercarea e lipsită de succes). Ca urmare, „Pegas" e tot atât de mult un termen singular cum sunt „5' ori „Bill Clinton", iar „pătratul rotund", „regele de astăzi al Franţei" sunt tot atât de mult termeni singulari cât şi „primul preşedinte al U.R.S.S.". Dificultăţile menţionate sugerează altceva: că limbajele de ordinul întâi nu pot da o reprezentare corespunzătoare a structurii limbilor naturale atâta vreme cât nu pot acomoda termeni singulari nedenotativi.

Pentru filosofii cu un temperament mai „pragmatic", problema se pune altfel: chestiunea existenţei termenilor singulari nedenotativi în limba naturală le apare ca total irelevantă. Căci, fie că ei există, fie că nu există, de multe ori noi folosim diverse expresii ca termeni singulari fără să ne intereseze dacă ei denotă ceva; uneori folosim aceste expresii tocmai pentru a decide în acest sens (de pildă, când vrem să probăm că Dumnezeu există). Ceea ce contează e altceva: ca limbajele formale pe care le folosim să dea seamă de aceste situaţii.

Ambele aceste reacţii pun în discuţie capacitatea logicii de ordinul întâi de a face faţă situaţiei şi par să susţină că admiterea unei logici depinde de capacitatea ei de a oferi soluţiile căutate (chiar dacă, pentru aceasta, s-ar sacrifica

cerința de a fi de ordinul întâi). Logicianul și filosoful atașat logicii standard va căuta să reziste însă acestui diagnostic. Strategia sa va fi următoarea: mai întâi, el va încerca să producă o descriere cât mai precisă a problemei; apoi, el va căuta să producă unelte și căi de a scăpa din chingile care par să-l sugrume.

Problema – se va putea argumenta – este că relativ la limbajele de ordinul întâi noi admitem următoarele două teze care însă par incompatibile:

a) există termeni singulari nedenotativi;

b) cuantificatorii sunt interpretați referențial.

Logicianul care nu vrea să renunțe la logica de ordinul întâi are la dispoziție două căi: să nege fie prima fie cea de a doua teză. În primul caz el are la îndemână iarăși două opțiuni:

a_1) să considere că toți termenii singulari sunt denotativi;

a_2) să nege că există termeni singulari.

Prima opțiune, cum am văzut în paragraful anterior, a fost explorată de Frege și Meinong. Cea de-a doua este cea a lui Russell-Quine. Amândouă suferă însă de un defect: nu par să dea seamă de ceea ce se întâmplă în limbile naturale: faptul că există realmente termeni singulari nedenotativi (cum susține adeptul perspectivei „metafizice"), ori faptul că în multe contexte existența denotatului nu are o importanță crucială (cum susține adeptul perspectivei „pragmatice" că se întâmplă în limba naturală).

Cea de-a doua cale – negarea tezei (b) – a părut multora ca extrem de promițătoare. Să vedem în ce constă interpretarea referențială a cuantificatorilor. Vom lua ca exemplu cuantificatorul existențial. Fie φ un predicat cu o singură variabilă liberă v. Conform definiției (11.3) și teoremei (11.8) (ea se aplică fiindcă $(\exists v)\,\varphi$ e o propoziție) și ținând cont de faptul că $(\exists v)\,\varphi$ este o prescurtare pentru $-(\forall v)\,-\varphi$, înseamnă că într-un model M avem $M \models (\exists v)\,\varphi$ ddacă există un obiect x în domeniul A al lui M astfel încât $M \models \varphi((x))$, cu alte cuvinte ddacă există un obiect care satisface pe φ. Cum ne amintim, definiția (11.3) a fost construită tocmai pentru a ne asigura de faptul că satisfacerea unei expresii precum $(\exists v)\,\varphi$ în M nu depinde de faptul dacă există un nume în L pentru fiecare obiect x din domeniul lui M. Adevărul lui $(\exists v)\,\varphi$ depinde de faptul că există un obiect în domeniu care satisface pe φ, nu de caracteristicile lui L (de faptul că obiectele din domeniu au nume). Aceasta este interpretarea referențială a cuantificatorilor.

Respingerea acestei interpretări a dat naștere așa-numitei interpretări *substituționale* a cuantificatorilor. Ideea intuitivă care stă în spatele acesteia e aceea că

(i) $(\forall v)\,\varphi$ este adevărată ddacă pentru orice termen t al limbajului L $\varphi(t)$ este adevărată;

(ii) $(\exists v)\varphi$ este adevărată ddacă există un termen t al limbajului L astfel încât $\varphi(t)$ este adevărată.

Este evident că, dat fiind un model M, interpretarea substituțională coincide cu cea referențială atunci când următoarele două condiții sunt îndeplinite:

1) orice obiect din domeniu este denotat de un termen.

2) orice termen denotă ceva.

Știm că cele două condiții nu sunt adesea împlinite: cum am văzut, nu orice număr real are un nume; iar, pe de altă parte, „Pagas" nu denotă nimic. Dar se poate proceda în felul următor (aceasta e o variantă a modelelor Henkin definite în § 13). Fie un model M cel mult numărabil. Adăugăm limbajului L o mulțime C infinit numărabilă de constante individuale c și definim funcția de interpretare astfel încât: a) numai expresiile din C sunt tratate drept constante individuale (celelalte constante care, eventual, apăreau în L sunt luate ca descripții); b) $I(C)$ e definită *pe* domeniul A al lui M. Vom spune că I este o interpretare cuantificațional substituțională a lui L în modelul M.

E interesant să notăm că sub o astfel de interpretare avem:

(21.8) M nu este model pentru mulțimea $\{ -(\forall v)\varphi, \varphi(v/c_1), \varphi(v/c_2) \ldots \}$ unde c_1, c_2 ... sunt toate constantele din C.

Dacă însă avem o interpretare referențială a cuantificatorilor, este posibil ca M să fie model pentru această mulțime; într-adevăr, dacă I e definită astfel încât $I(C)$ e strict inclusă în A, atunci e posibil ca pentru toți $c \in C$ să avem $\varphi(c)$, chiar dacă $(\forall v)\varphi(v)$ e falsă în M. Acest rezultat sugerează că interpretările substituțională și referențială a cuantificatorilor sunt diferite. Dar dacă e așa, înseamnă că logicianul care urmează calea a doua – aceea de a respinge interpretarea referențială a cuantificatorilor în vederea ocolirii conflictului cu teza existenței termenilor nedenotativi – nu are prea mari șanse să-și îndeplinească obiectivul. Totuși, lucrurile nu stau atât de rău. Se poate arăta că cele două interpretări coincid în cazul propozițiilor:

(21.9) Dacă Σ e o mulțime de propoziții, iar σ o propoziție, atunci; $\Sigma \models \sigma$ ddacă orice interpretare cuantificațional substituțională care satisface propozițiile din Σ satisface de asemenea pe σ.

Desigur că în definiția relației $\models$ (definită în § 13) intervine ideea de interpretare cuantificațional referențială; sensul ei este: orice interpretare cuantificațional referențială care satisface pe Σ satisface și pe φ.

Demonstrație. Suficiența este trivială, fiindcă, așa cum am definit interpretările cuantificațional substanționale, ele sunt o subclasă a celor cuantificațional referențiale. Să dovedim deci necesitatea. Pentru aceasta, vom arăta că dacă nu are loc relația $\Sigma \models \varphi$, atunci există o interpretare cuantificațional substituțională care satisface pe Σ, dar nu și pe φ. Să presupunem, într-adevăr, că $\Sigma \models \varphi$ nu

are loc. Atunci mulţimea $\Sigma \cup \{-\varphi\}$ este consistentă şi, deci, are un model. Potrivit teoremei descendente Löwenheim-Skolem, există un model numărabil M în care sunt adevărate toate propoziţiile din $\Sigma \cup \{-\varphi\}$. Acum putem construi o interpretare I substituţională a lui $L \cup C$ în M. Evident, întrucât elementele mulţimii $\Sigma \cup \{-\varphi\}$ sunt propoziţii, această mulţime e satisfăcută în M sub I, q.e.d.

Adoptând interpretarea substituţională, trebuie modificată definiţia (13.3) a relaţiei de satisfacere. Dacă suntem însă înclinaţi să păstrăm această definiţie, atunci va trebui să desţelenim altă cale de a răspunde dificultăţilor de felul celor menţionate mai sus. Adepţii logicii libere („libere" de supoziţii existenţiale) sugerează că putem păstra înţelegerea referenţială a cuantificatorilor, împreună cu ideea că există termeni singulari denotativi. Desigur însă că ceva trebuie totuşi schimbat. Ei propun să modificăm condiţiile în care suntem îndreptăţiţi să afirmăm o propoziţie cuantificată. Ei resping următoarele două teze logice:

(21.10.1) $\varphi(t) \rightarrow (\exists\ v)\ \varphi(v)$

(21.10.2) $(\forall\ v)\ \varphi(v) \rightarrow \varphi(v/t)$

ca şi regula

(21.10.4) $\varphi(v)\ /\ (\forall\ v)\ \varphi(v)$

Odată ce procedăm aşa, renunţăm la însuşi nucleul logicii de ordinul întâi. Problema logicianului liber e aceea de a elabora această idee în chip satisfăcător atât semantic cât şi sintactic. Vom începe cu aspectul sintactic. Intuiţia logicianului liber e aceea că în (21.10) nu putem trece de la antecedent la consecvent dacă termenul t nu este denotativ; aşadar, potrivit lui expresiile (21.10) devin admisibile numai dacă în antecedent punem o condiţie care să exprime această caracteristică a lui t. Să vedem cum procedează el. Să observăm că în logica standard e lege expresia:

(21.11) $(t = t) \rightarrow (\exists\ v)(v = t)$

(conform schemei axiomatice (21.10.1)); cum antecedentul este lege, se deduce consecventul (expresia (21.6.1)). În logica liberă însă, dat fiind că (21.10.1) nu mai e admisă, înseamnă că nu este lege logică (21.6.1): $(\exists\ v)(v = t)$. Cum am văzut, sensul acestei expresii este (adoptând interpretarea referenţială a cuantificatorilor!) următorul: există un obiect care este denotaţia lui t. Aşadar, (21.6.1): $(\exists\ v)(v = t)$ spune că t este un termen denotativ – ceea ce e tocmai condiţia căutată. Să definim predicatul E (al *existenţei*) în felul următor:

$E(t) =$ df. $(\exists\ v)(v = t)$

Acum, păstrând interpretarea referenţială a cuantificatorilor şi putinţa de a defini cuantificatorul existenţial prin cel universal ($(\exists\ v)$ ca prescurtare pentru $-(\forall\ v)-$), expresiile (21.10) vor fi înlocuite cu:

(21.12.1) $(\varphi(t) \cdot E(t)) \rightarrow (\exists\ v)\ \varphi(v)$

(21.12.2) $((\forall\ v)\ \varphi(v) \cdot E(t)) \rightarrow \varphi(v/t)$

(Exercițiu: să se arate că (21.12.2) se obține din (21.12.1)). De asemenea, regula

(21.13) $\psi \rightarrow \varphi(t) \; / \; \psi \rightarrow (\forall\, v)\; \varphi(t/v)$

(unde t nu apare în $\psi \rightarrow (\forall\, v)\; \varphi(t/v)$ e înlocuită cu:

(21.14) $\psi \rightarrow (E(t) \rightarrow \varphi(t)) \; / \; \psi \rightarrow (\forall\, v)\; \varphi(t/v)$

(unde iarăși t nu apare în $\psi \rightarrow (\forall\, v)\; \varphi(t/v)$). Se observă ușor că în logica liberă nu putem proba, de pildă, că Dumnezeu există din aceea că Dumnezeu este identic cu Dumnezeu. Căci pentru aceasta avem nevoie de o premisă suplimentară ($(\exists\, v(v$ = Dumnezeu)) – adică de exact ceea ce vrem să demonstrăm.

Să mai observăm următorul lucru: dacă în (21.13) se ia ψ ca mulțimea vidă, atunci obținem regula (21.10.4), care am văzut că nu este admisă în logica liberă. În această logică este admisă însă regula

(21.14′) $(E(t) \rightarrow \varphi(t))/(\forall\, v)\; \varphi\; (t/v)$

Ea provine din 21.14) luând pe ψ ca vidă.

Una dintre cele mai importante legi logice care pot fi demonstrate în logica liberă este următoarea:

(21.15.1) $(\forall\, v)\;\; (\exists\, v')\; (v' = v)$

Demonstrație. Expresia de mai jos este o tautologie:

(i) $(\exists\, v')\; (v' = t) \rightarrow \;\; (\exists\, v')\; (v' = t)$

În același timp, (i) este o instanță a premisei regulii (21.14) (în care luăm pe ψ ca $\varnothing$). Aplicând această regulă, obținem imediat pe (21.15.1), q.e.d.

Să observăm acum că o subformulă a lui (21.15.1), anume $(\exists\, v')\; (v' = v)$ este, potrivit definiției lui E, $E(v)$. Atunci expresia noastră este echivalentă cu

(21.15.2) $(\forall\, v)\; E(v)$

Am putea să citim expresia aceasta ca: orice există. Aceasta corespunde cu interpretarea dată de Quine cuantificatorului existențial. La întrebarea: ce există? Quine crede că răspunsul este foarte simplu: totul. A fi, arată el, este *a fi valoare a unei variabile care poate fi legată*. În (21.15.2) variabila legată este v; există orice e valoare a lui v și face adevărată expresia ce rezultă din $E(v)$, înlocuind pe v cu un nume al acelui obiect. Dacă e adevărată $E(t)$, înseamnă că obiectul denotat de t există.

Pentru a înțelege mai bine diferența între acceptarea lui (21.10.2): $(\forall\, v)\; \varphi(v) \rightarrow \varphi(v/t)$ (legea specificării) și acceptarea lui (21.12.2): $((\forall\, v)\; \varphi(v) \cdot E(t)) \rightarrow \varphi(v/t)$ (legea restrânsă a specificării) să notăm mai întâi că în a doua expresie condiția suplimentară – echivalentă cu $(\exists\, v')(v' = t)$ – poate fi citită în mod legitim ca afirmând că t denotă o valoare a unei variabile legate (v'), sau, mai simplu (*via* dictum-ului lui Quine), că termenul t denotă. Prin urmare, spre deosebire de legea nerestrânsă a specificării, legea (21.12.2) nu spune nimic despre termenii nedenotativi; ea spune doar ceea ce putem face

atunci când termenii denotă. Din acest motiv, ea nu poate fi folosită pentru a deriva din propoziţia

(21.16.1) Nimic (existent) nu e cal cu aripi.

propoziţia

(21.16.2) Pegas nu este cal cu aripi.

Însă poate fi folosită pentru a deriva din (21.16.1) şi

(21.16.3) Bucephal există.

propoziţia

(21.16.4) Bucephal nu este cal cu aripi.

Prin urmare, potrivit logicii libere nu putem deduce din afirmaţii universale decât afirmaţii despre obiectele existente. Totuşi, cum vom vedea imediat atunci când vom aborda aspectul semantic, în logica liberă putem fi de acord că propoziţia (21.16.2) e falsă, dar putem admite în acelaşi timp că propoziţia

(21.16.5) Pegas nu este crocodil.

e adevărată. Tot ceea ce s-a dovedit aici este că legea restrânsă a specificării nu poate fi folosită pentru a deriva pe (21.16.2) din (21.16.1).

În sfârşit, să notăm că în cele de mai sus am folosit în chip esenţial identitatea. Relaţia de identitate a fost tratată în capitolul anterior ca având o natură logică; pe de altă parte, al doilea ingredient folosit pentru a defini pe E este cuantificatorul existenţial, aplicat unei variabile. Şi acesta a fost tratat ca ţinând nu de limbajul de formalizat, ci de instrumentele logice folosite pentru a formaliza un limbaj. Existenţa e construită, prin urmare, ca un predicat care presupune doar logica – nu e deci un predicat al unui limbaj, alături de celelalte predicate.

Dacă însă logica folosită ar fi mai slabă (de pildă, nu ar conţine identitatea) şi nu am putea construi predicatul E ca mai sus, cum s-ar putea proceda? Desigur că am putea lua predicatul E ca *primitiv* şi am putea stipula pe (21.12) şi (21.14). Să numim *CCLE* (calculul cuantificaţional liber cu predicatul E) logica ce rezultă astfel. Ceea ce se poate arăta (rezultatul a fost probat de Meyer şi Lambert) este că *CCLE* poate fi tratată ca o logică cu cuantificatori restrânşi.

Fie, într-adevăr, un limbaj L în care există un predicat E. Presupunem că în formalizarea lui L am folosit doar conectivele logice – şi $\rightarrow$ şi cuantificatorul $\forall$ (celelalte conective logice, precum şi cuantificatorul $\exists$ se pot defini ca de obicei). Fie acum un limbaj $L' = L \cup \{Q\}$, unde Q este un predicat unar.

Vom defini o traducere* a formulelor lui L în cele ale lui L' în felul următor:

(i) $P(t_1, \ldots t_n)^* = P(t_1, \ldots t_n)$

(ii) $E(t)^* = Q(t)$

(iii) $(- \varphi)^* = - (\varphi^*)$

(iv) $(\varphi \rightarrow \psi)^* = \varphi^* \rightarrow \psi^*$

(v) $((\forall\ v)\varphi)^* = (\forall\ v)(Q(v) \rightarrow \varphi^*)$

Meyer şi Lambert au demonstrat că:

(21.17) O propoziţie φ a lui L este teoremă a *CCLE* ddacă propoziţia φ^* (a lui L') e o teoremă a logicii de ordinul întâi.

Demonstraţie. Suficienţa e trivială: trebuie arătat doar că traducerea oricărei axiome a lui *CCLE* este o teoremă a logicii de ordinul întâi şi că, dacă φ^* şi $(\varphi \rightarrow \psi)^*$ sunt teoreme ale logicii de ordinul întâi, atunci şi ψ^* e teoremă a logicii de ordinul întâi.

Necesitatea e mai complicată. Aceasta pentru că, desigur, logica de ordinul întâi pare mai puternică decât logica liberă – şi deci nu e trivial faptul că logica de ordinul întâi nu permite să demonstrăm mai multe teoreme decât ne permite cea liberă. Demonstraţia curge astfel: pentru orice propoziţie φ^* a lui L', să construim o propoziţie $\varphi^{*\wedge}$ substituind în φ^* pe Q cu E.

Lema 1: φ^* este o teoremă a logicii de ordinul întâi ddacă $\varphi^{*\wedge}$ este o teoremă a logicii de ordinul întâi.

Lema 2. În *CCLE* e teoremă:

$(\forall\ v)(E(v) \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\forall\ v)\psi$

Lema 1 este evidentă. Să trecem la lema 2. Avem

(i) $(\forall\ v)(E(v) \rightarrow \psi) \rightarrow ((\forall\ v)E(v) \rightarrow (\forall\ v)\psi)$ (teoremă în *CCLE*)

(ii) $(\forall v)E(v) \rightarrow ((\forall\ v)(E(v) \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall\ v)\psi)$ (din (i), prin logica propoziţiilor)

(iii) $(\forall\ v)(E(v)$ (teoremă în *CCLE*)

(iv) $(\forall\ v)(E(v) \rightarrow \psi) \rightarrow \psi(v/t)$ (din (ii) şi (iii) prin regula detaşării)

(v) $((\forall\ v)\ \psi(v) \cdot E(t)) \rightarrow \psi(v/t)$ (instanţă a lui (21.12.2)

(vi) $((\forall\ v)\ \psi(v) \cdot E(t)) \cdot E(t)) \rightarrow \psi(v/t)$ (din (v), prin logica propoziţiilor)

(vii) $(\forall\ v)\ \psi(v) \rightarrow (E(t) \rightarrow (E(t) \rightarrow \psi(v/t)))$ (din (vi), prin logica propoziţiilor)

(viii) $(\forall\ v)\ \psi(v) \rightarrow (\forall\ v)(E(v) \rightarrow \psi(v))$ (din vii), prin (21.14)

(ix) $(\forall\ v)(E(v) \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\forall\ v)\ \psi$ (din (iv) şi (viii) q.e.d.

Din cea de-a doua lemă decurge că în *CCLE* φ şi $\varphi^{*\wedge}$ sunt echivalente (pentru cazul când φ este $(\forall\ v)\ \varphi$, apelăm la lema 2; în celelalte cazuri, rezultatul este imediat). Dar atunci ceea ce ne rămâne e să arătăm că $\varphi^{*\wedge}$ e demonstrabilă în *CCLE* ddacă $\varphi^{*\wedge}$ e demonstrabilă în logica de ordinul întâi. Suficienţa este trivială. Rămâne doar să se arate că necesitatea are loc, adică:

Lema 3. Dacă $\varphi^{*\wedge}$ e demonstrabilă în logica de ordinul întâi, atunci ea e demonstrabilă în *CCLE*.

Dificultatea se observă uşor că apare atunci când $\varphi^{*\wedge}$ a fost demonstrată în logica de ordinul întâi folosind legea specificării. Dar, prin inducţie asupra demonstraţiei, putem arăta că toate instanţele de folosire ale acestei legi sunt de asemenea instanţe de folosire a schemei mai slabe:

$(\forall\ v)(E(v) \rightarrow \psi) \rightarrow (E(t) \rightarrow \psi(v/t))$

care se poate demonstra în *CCLE*. Această inducţie e lăsată ca exerciţiu pentru cititor.

Să trecem acum la semantica logicii libere. În semantica logicii de ordinul întâi, determinarea valorii de adevăr a unei propoziţii precum

(21.18) Socrate este filosof.

la un model M se făcea, ne amintim, astfel. Mai întâi, se determina domeniul A al lui M. Mulţimea A era domeniul în care variabilele luau valori (acest fapt era exprimat, între altele, în aceea că în definirea relaţiei de satisfacere şirurile de obiecte la care se apela erau şiruri de obiecte din A). Apoi, se defineau interpretarea constantei individuale „Socrate" în A şi interpretarea predicatului „filosof" în A; în sfârşit, se cerceta dacă interpretarea lui „Socrate" era cuprinsă în interpretarea lui „filosof", adică dacă

I(Socrate) $\in$ I(filosof)

În logica liberă această strategie nu mai poate funcţiona, fiindcă se poate întâmpla ca o constantă individuală să nu aibă interpretare în A; într-un model în care Socrate nu există, I(Socrate) nu e definită. Logicianul clasic avea în această situaţie, aşa cum am văzut, mai multe căi de urmat: a) să excludă termenii singulari nedenotativi din clasa acelor expresii pentru care trebuie dată o interpretare directă (strategia Russell-Quine); b) să adauge domeniului A noi obiecte – denotate ale acestor termeni (strategia Frege-Meinong); c) să admită doar modele în care „obiectele" considerate sunt lingvistice – termenii înşişi ai limbajului (strategia substituţională).

La rândul său, logicianul liber de asemenea are mai multe opţiuni. Voi menţiona trei direcţii în acest sens.

a) *Strategia domeniilor exterioare.* Voi aminti aici propunerea lui N. Cocchiarella a „obiectelor posibile şi reale". Cocchiarella propune ca în definirea modelului M pentru un limbaj L să considerăm nu un singur domeniu, ci *două* domenii – fie acestea A şi A', unde $A' \subseteq A$. Noutatea constă în noua mulţime (posibil vidă) A'. Să notăm mai întâi că predicatele sunt interpretate în A (deci $I(P^n) \subseteq A^n$. Dar A' este domeniul cuantificatorilor $\forall$ şi $\exists$. Aceşti cuantificatori au, în logica liberă, un sens existenţial; obiectele din A' sunt cele reale, efective. Fie t un termen. Dacă în modelul M propoziţia

$(\exists\ v)(v = t)$

e adevărată, înseamnă ci $I(t) \in A'$.

Mulţimea A este a obiectelor posibile (chiar dacă nu neapărat reale). Desigur că am putea introduce doi noi cuantificatori – unul universal „$\wedge$" şi unul existenţial „V" – al căror domeniu să fie A. Aceşti cuantificatori nu au însă un sens existenţial. Legea specificării e satisfăcută de $\wedge$ şi V, dar nu şi de $\forall$ şi $\exists$, care satisfac numai legea restrânsă a specificării. Pe de altă parte, evident că avem însă

(21.19.1) $(\wedge\ v)\varphi \rightarrow (\forall\ v)\varphi$

(21.19.2) $(\exists\ v)\varphi \rightarrow (\mathrm{V}\ v)\varphi$

Semantica lui Cocchiarella e diferită de cea meinongiană. Aceasta pentru că în logica liberă a lui Cocchiarella se introduce ideea de cuantificator restrâns cu sens existenţial, care satisface restricţiile impuse de logica liberă.

Semantica lui Cocchiarella are o serie de avantaje tehnice: mai întâi, ea permite să ataşăm valori de adevăr propoziţiilor în care apar termeni singulari nedemonstrativi; apoi, ea e o semantică *bivalentă:* aceste valori de adevăr sunt adevărul şi falsul; în al treilea rând, e posibil să se dea o demonstraţie de completitudine pentru logica liberă construită astfel. În sfârşit, această semantică este intuitiv acceptabilă. De pildă, în ea se poate construi un model în care propoziţia

(21.7.1) Pegas este cal cu aripi.

e adevărată, în timp ce propoziţia

(21.7.2) Pegas este crocodil.

e falsă. În acelaşi timp, din (21.7.1) se poate deduce

(21.7.1´) $(\mathrm{V}\ v)\ C(v)$

dar nu şi aserţiunea existenţială

(21.7.1´´ ´) $(\exists\ v)\ C(v)$

Dar propunerea semantică a lui Cocchiarella are şi dezavantaje. E de notat că cele mai multe sunt de natură filosofică – ea nu satisface opţiuni filosofice. Cea mai importantă, la fel ca şi în cazul strategiei lui Meinong, este aceea că e neclar statutul elementelor din domeniul exterior A–A'; ce natură au ele? Cum le putem individua? În al doilea rând, chiar dacă statutul obiectelor „doar posibile" ar fi clarificat, rămâne problema felului în care în această semantică se face apel la ele. De pildă, să presupunem că în nici un izvor transmis despre Pegas nu e menţionată înălţimea acestuia; mulţi filosofi, inclusiv Meinong, au admis că unele obiecte precum Pegas sunt „incomplete", adică există proprietăţi P astfel încât ele nu au nici P, nici non-P. De aici ar decurge că propoziţia

(21.20) Pegas are doi metri înălţime.

nu e nici adevărată, nici falsă. Semantica lui Cocchiarella nu admite această posibilitate. Mai departe, această semantică e ataşată unei alte supoziţii dubioase: anume, să ne gândim la predicatul „mai înalt". Aceasta e interpretat ca o mulţime de perechi din A. Dar atunci propoziţia:

(21.21) Pegas e mai înalt decât Bucephal.

va fi adevărată sau falsă, potrivit acestei semantici. Or, prin ea se compară obiecte existente cu obiecte inexistente (în M) – ceea ce mulţi filosofi nu ar admite.

b) *Strategia convenţiilor.* Ea constă în următoarele (Schock, Burge): funcţia I interpretează simbolurile predicative în domeniul A al modelului, în modul uzual, şi interpretează *unele* constante individuale (posibil toate, posibil doar

unele, posibil nici una) în A. Valorile de adevăr pentru propoziţiile atomare în care nu apar constante individuale neinterpretate se determină în modul obişnuit; dar pentru toate propoziţiile atomare în care apar astfel de constante se stabileşte convenţional o anumită valoare de adevăr – adevărul sau falsul. Apoi, valorile de adevăr pentru expresiile complexe se stabilesc în mod uzual.

Această strategie poate lua două forme. Cea *pozitivă* ataşează tuturor propoziţiilor atomare în care apar constante individuale neinterpretate adevărul; cea *negativă* ataşează tuturor acestor propoziţii falsul.

În favoarea primei forme contează faptul că astfel expresia

(21.22) $c = c$

rămâne lege logică, ceea ce e de dorit. Ea pune sub semnul întrebării însă posibilitatea de a efectua substituţia identicilor. Într-adevăr, să presupunem că într-un model constanta c nu e definită, dar c' e definită, iar pentru un predicat P avem $I(c') \in I(P)$. Atunci, cum semantica e pozitivă, propoziţiile

(21.23.1) $c = c'$

şi

(21.23.2) $P(c)$

sunt adevărate. Însă, conform condiţiilor noastre, propoziţia

(21.23.3) $P(c')$

e falsă. Însă $P(c')$ se obţine din $P(c)$ prin substituţia unor termeni identici: trebuie să conchidem că substituţia identicilor e încălcată în acest caz.

Semantica negativă pare să aibă mai multe argumente în favoarea sa. Istoric, ea este în rând cu teoria lui Russell a descripţiilor, care ataşa falsul oricărei propoziţii de forma $P((\iota v)\, R(v))$; un alt motiv este acela că ea face dreptate ideii că obiectele inexistente nu pot sta în nici un fel de relaţie cu cele existente. Propoziţia (21.21): Pegas e mai înalt decât Bucephal e falsă. În al treilea rând, legea substituirii identicilor e păstrată etc.

Dar cel puţin două obiecţii pot fi ridicate aici. Mai întâi, intuitiv nu pare corect să considerăm că propoziţia

(21.24) Pegas a fost călărit de Bellerophon

este falsă în orice model în care nici „Pegas" şi nici „Bellerophon" nu au denotat; dimpotrivă, considerăm adevărată această propoziţie în unele modele. Apoi, faptul că această semantică este concordantă cu poziţia lui Russell nu e neapărat un argument în favoarea ei. Căci se poate argumenta că decizia privind valoarea de adevăr într-un model a propoziţiilor în care apar termeni singulari nedenotativi (în acel model) nu trebuie făcută a priori; mai degrabă, decizia trebuie să ţină cont de situaţia particulară în discuţie, de natura problemei: considerente de natură pragmatică pot fi uneori foarte importante.

c) *Strategia supervaluărilor.* Ea a fost introdusă de către B. van Fraassen. Să pornim de la propoziţia

(21.20) Pegas are doi metri înălţime.

Am văzut că potrivit convenţiei pozitive, ea e adevărată într-un model dacă „Pegas" nu denotă (în acel model); potrivit convenţiei negative, ea e falsă într-un model dacă „Pegas" nu denotă. Pe de altă parte, am menţionat că s-ar putea lua această propoziţie ca neavând valoare de adevăr. Van Fraassen consideră însă că aceste convenţii ţin de filosofia limbajului, nu de logică: logica nu trebuie să încorporeze astfel de presupuneri, oricât de puternice ar fi raţiunile invocate în sprijinul lor. Altfel zis, logica trebuie să fie independentă de filosofia limbajului. Din punct de vedere logic, crede van Fraassen, nu trebuie să reţinem decât ce au în comun *toate* aceste convenţii: logica vizează „produsul logic" al tuturor acestor convenţii.

Să construim acum noţiunea de supervaluare ca un astfel de „produs logic". Fie un model *M*. Luăm o interpretare *I*; pe baza ei, se ataşează valori de adevăr în modalitatea uzuală pentru propoziţiile atomare în care toţi termenii denotă; celor în care apar termeni care, potrivit lui *I*, nu denotă, li se atribuie, potrivit unei convenţii la alegere, o valoare de adevăr. Apoi, în modul uzual, se atribuie valori de adevăr propoziţiilor compuse. Să numim *valuare* (relativă la *M*) o funcţie care ataşează potrivit procedurii descrise mai sus o valoare de adevăr fiecărei propoziţii. O *supervaluare* (relativă la *M*) se defineşte astfel: ea ataşează valoare de adevăr unei propoziţii dacă *toate* valuările ataşează acelei propoziţii valoarea adevăr; şi îi ataşează valoarea fals dacă *toate* valuările îi ataşează valoarea fals. Dacă acea propoziţie primeşte valoarea adevăr sub unele valuări şi valoarea fals sub altele, atunci supervaluarea nu îi ataşează nici o valoare de adevăr.

Vom observa că dacă, de exemplu, „Pegas" nu denotă, atunci supervaluarea definită nu va ataşa vreo valoare de adevăr propoziţiei

(21.20) Pegas are doi metri înălţime.

În schimb, ea va ataşa adevărul propoziţiei

(21.20.1) Pegas are doi metri înălţime sau Pegas nu are doi metri înălţime.

şi falsul propoziţiei

(21.20.2) Pegas are doi metri înălţime şi Pegas nu are doi metri înălţime.

Faptul că într-o propoziţie apare un termen care nu denotă nu conduce direct la o anumită valoare de adevăr ataşată ei potrivit supervaluării; unele propoziţii sunt adevărate, altele false, altele nu au valoare de adevăr.

Dar şi această strategie are anumite dezavantaje. Mai întâi, ea nu ataşează nici o valoare de adevăr propoziţiilor (21.7.1) şi (21.7.2) – ceea ce nu pare să concorde cu intuiţiile noastre. Apoi, cum propoziţia

$c = c$

nu primeşte vreo valoare de adevăr dacă *c* nu denotă, legea substituirii identicilor

cade. În al treilea rând, soluția lui van Fraassen pare mai degrabă un *deus ex machina* pentru a rezolva problemele acolo unde nu avem criterii de a alege între alternative; de pildă, în dezvoltarea metodei van Fraassen introduce restricții în definirea valuărilor care sunt motivate doar tehnic[1] (= permit obținerea unor rezultate tehnice interesante), dar care nu au și o motivație teoretică.

§ 22. Exerciții

1. Demonstrați în *SA* teoremele $T_1 - T_{10}$.

2. În silogistică se deosebesc patru figuri, după poziția pe care o are „termenul mediu" în premise. Ele sunt următoarele:

$M-P$	$P-M$	$M-P$	$P-M$
$\underline{S-M}$	$\underline{S-M}$	$\underline{M-S}$	$\underline{M-S}$
$S-P$	$S-P$	$S-P$	$S-P$
figura I	figura a II-a	figura a III-a	figura a IV-a

(literele S, P, M stau pentru subiectul concluziei, respectiv predicatul concluziei și termenul mediu. De pildă, un mod de figura a III-a are forma (felul propozițiilor ce apar în el e ales la întâmplare):

Toți M sunt P.
Unii M sunt S.
Unii S sunt P.

Arătați ce moduri din figurile a II-a, a III-a și a IV-a sunt demonstrabile în *SA*.

3. Ce relații între mulțimi reprezintă interpretările în modelul standard al *SA* ale relațiilor E și O?

4. Arătați că în L' sunt demonstrabile schemele axiomatice corespunzătoare axiomelor A_1, A_3 și A_4 ale *SA*.

5. Fie $T = \{\varphi : \varphi \text{ este de forma } MiM\}$ o teorie în L'.
Arătați dacă:

$T \vdash \psi$

unde ψ este o formulă care

a) exprimă subalternarea unei particulare față de o universală;

b) exprimă conversiunea unei propoziții universal afirmative;

c) exprimă un mod silogistic demonstrabil în *SA* cu premise universale, dar cu o concluzie particulară.

---

[1] De pildă, se cere ca pentru orice valuare valoarea oricărei propoziții de forma $c = c$ să fie adevărul; dacă $I(c)$ și $I(c')$ nu sunt definite *ambele*, atunci valoarea lui $c = c'$ este adevărul pentru orice valuare etc.

6. Să se arate că:

$Ar(\varphi \cdot \psi) \leftrightarrow Ar(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow Ar(\varphi \rightarrow \psi)$

pentru orice formule φ şi ψ din L'.

7. Să se arate că:

$Ar(\varphi \cdot \psi) \leftrightarrow Ar(\varphi) \cdot Ar(\psi)$

pentru orice formule φ şi ψ din L';

8. Construiţi un model al *SA* al cărui domeniu să fie mulţimea numerelor naturale, iar relaţia *A* să fie interpretată ca relaţia de divizibilitate între numere.

9. Formalizaţi potrivit strategiei logicii multisortate propoziţiile:

a) (19.3)

b) Unii oameni au vizitat în câţiva ani toate ţările din Europa.

c) Unii oameni sunt înzestraţi cu toate calităţile unui bun general.

10. Formalizaţi aceleaşi propoziţii potrivit strategiei cuantificării restrânse.

11. Consideraţi un limbaj L' de ordinul doi care nu conţine constante individuale şi termeni funcţionali. Formalizaţi pe L' ca o logică bisortată L'_2.

12. Construiţi traducerea propoziţiilor lui L'_2 într-un limbaj L'^2. Arătaţi că L'^2 este limbaj de ordinul întâi. Demonstraţi propoziţia (19.8) pentru L'_2.

13. Daţi exemple de descripţii în care:

a) apar numai expresii predicative;

b) apar nume proprii;

c) apar alte descripţii;

d) apar conective logice (conjuncţia, disjuncţia).

14. Analizaţi, potrivit strategiilor lui Meinong şi Frege, propoziţiile (20.6) Cum diferă cele două tipuri de analiză?

15. Analizaţi, potrivit fiecăreia din cele două strategii, propoziţia:

Muntele de aur este un munte.

16. Cum se pot analiza, potrivit strategiei lui Russell, propoziţiile (20.3.2)–(20.3.5)?

17. Cum se pot analiza, potrivit strategiei lui Russell, propoziţiile (20.9)? Este rezultatul obţinut în concordanţă cu intuiţiile noastre?

18. Formalizaţi următoarele propoziţii, interpretând negaţia atât ca având o intrare primară cât şi ca având o intrare secundară:

a) Preşedintele de astăzi al Rusiei nu este M. Gorbaciov;

b) M. Gorbaciov nu este preşedintele de astăzi al Rusiei;

c) Iniţiatorul perestroicii nu este preşedintele de astăzi al Rusiei;

d) Tânărul cu ochelari nu este secretarul particular al preşedintelui de astăzi al Rusiei.

19. Un argument în favoarea strategiei lui Russell decurge astfel:

Propoziţia „Regele de astăzi al Franţei este chel" e evident falsă, fiindcă Franţa e o republică. Dar atunci ar decurge că propoziţia „Regele de astăzi al

Franţei nu este chel" trebuie să fie adevărată. Strategia lui Russell arată cum e posibil aşa ceva.

Este corect acest argument?

20. Apreciaţi următorul argument, pe care Russell l-a folosit împotriva lui Meinong:

Cum muntele de aur nu există, existentul munte de aur nu există. Dar toate instanţele schemei „Toţi *AB* sunt *A*", de pildă „Cartea legată în piele este legată în piele" sunt adevărate. Prin urmare, propoziţia „Existentul munte de aur există" e adevărată. Dar aceasta contrazice faptul că existentul munte de aur nu există.

21. Să se formalizeze următoarele propoziţii:

a) Există cel mult un student în clasă.

b) Există exact un student în clasă.

c) Există cel puţin *n* studenţi în clasă.

d) Există exact *n* studenţi în clasă.

22. Să se analizeze potrivit strategiei lui Quine propoziţiile:

a) Cerber este câine.

b) Cerber este câinele lui Hades.

c) Cerber nu există.

23. Se definesc următoarele noţiuni:

(i) Fie L' un limbaj în care cuantificatorii sunt interpretaţi referenţial, iar M un model al lui L'. Atunci I este o *interpretare canonică* pentru M ddacă I aplică mulţimea constantelor lui $L' \cup C$ pe domeniul lui M.

(ii) O *valuare* este o funcţie indusă de un model şi o interpretare care ataşează fiecărei propoziţii a lui L o valoare de adevăr.

(iii) O valuare se numeşte *canonică* dacă este indusă de un model şi de o interpretare canonică.

(iv) L este un *limbaj cuantificaţional substituţional* = df există un limbaj L' care are aceeaşi sintaxă ca şi L şi valuările admisibile ale lui L sunt exact valuările canonice ale lui L'.

(v) *O mulţime model* (Hintikka) este o mulţime X de propoziţii (ale unui limbaj L) cu următoarele proprietăţi:

(a) X conţine toate propoziţiile de forma $c = c$, şi nu conţine atât o propoziţie φ cât şi negaţia ei $-\varphi$;

b) Dacă $--\varphi \in X$, atunci $\varphi \in X$;

(c) Dacă $-(\varphi \cdot \psi) \in X$, atunci $-\varphi \in X$ sau cel puţin $-\psi \in X$;

(d) Dacă $(\varphi \cdot \psi) \in X$, atunci $\varphi \in X$ şi $\psi \in X$;

(e) Dacă $-(\forall v)\ \varphi \in X$, atunci $-\varphi(v/t)$ pentru cel puţin un termen t;

(f) Dacă $(\forall v)\varphi \in X$, atunci $\varphi(v/t) \in X$ pentru toţi termenii t;

(g) Dacă $c = c' \in X$ şi $\varphi \in X$, atunci $\varphi(c/c') \in X$.

Să se arate că:

(i) Dacă L este un limbaj cuantificaţional substituţional iar Σ este o mulţime de propoziţii ale lui L, atunci Σ este realizabilă ddacă Σ este conţinută într-o mulţime model.

(ii) Fie φ o formulă a unui limbaj cuantificaţional substituţional L, iar $v_1, \ldots v_n$ toate variabilele libere ce apar în φ. Atunci în orice model M şi sub orice interpretare admisibilă a lui L, φ are valoarea adevăr ddacă $\psi = (\forall v_1) \ldots (\forall v_n) \varphi$ este validă în L.

24. Folosiţi cuantificatorii referenţiali şi substituţionali pentru a analiza următorul raţionament:

Flămânzilă a fost numit aşa datorită poftei sale de mâncare.

Cineva a fost numit aşa datorită poftei sale de mâncare.

25. Demonstraţi:

a) propoziţia (21.12.2) pe baza lui (21.12.1);

b) regula $(E(t) \cdot \varphi(t)) \rightarrow \psi \; / \; (\exists v)\, \varphi(v) \rightarrow \psi$

unde t nu apare în $(\exists v)\, \varphi(v) \rightarrow \psi$.

26. În strategia domeniilor exterioare, să luăm mulţimile A şi A' ca disjuncte (aceasta e propunerea logicienilor Leblanc şi Thomason). Construiţi *in extens* această semantică.

27. În strategia domeniilor exterioare, luaţi A şi A' ca distincte şi puneţi $A = \{*\}$ (propunerea lui D. Scott). Arătaţi că în această semantică sunt validate expresiile:

a) $(- E(t) \cdot - E(t')) \rightarrow t = t'$

b) $-E(t')) \rightarrow t = *$

c) $* = (\exists v)\, (v \neq v)$

28. Încercaţi să comparaţi:

a) propunerea lui Cocchierella şi noţiunea de cuantificare restrânsă;

b) propunerea lui Leblanc–Thomason şi strategia lui Meinong de abordare a termenilor nedenotativi;

c) propunerea lui D. Scott şi strategia lui Frege de abordare a termenilor nedenotativi.

29. Fie o valuare V care satisface următoarele condiţii:

(i) $V(t = t) = 1$ (= adevărul)

(ii) Dacă numai unul dintre termenii t şi t' este interpretat, atunci $V(t = t') = 0$ (= falsul)

(iii) $V(\varphi(v/t)) = V(\varphi(v/t'))$ dacă sau $V(t = t') = 1$ sau $I(t) = I(t')$

Să presupunem că oricare două valuări V şi V' (relative la acelaşi model) sunt astfel încât $V((\forall\ v)\ \varphi\ (v)) = V'((\forall\ v')\ \varphi\ (v'))$ unde $\varphi(v)$ e o expresie în care singura variabilă liberă este v, iar $\varphi(v')$ este $\varphi(v/v')$. Ce proprietăţi are supervaluarea indusă de valuările de tipul lui V?

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

Cititorul care, mergând la vreo bibliotecă mare, îşi aşează pe masa de lucru opt-zece cărţi în al căror titlu e cuprinsă sintagma „logică filosofică" este surprins să constate că, în contra aşteptărilor sale, multe din lucrările din faţa sa aproape că nu au nimic comun, care să le facă să fie de „logică filosofică". Într-adevăr, subiectele tratate diferă foarte mult între ele; tehnicile utilizate variază mult de la lucrare la lucrare; autorii citaţi copios într-o carte lipsesc cu desăvârşire într-alta etc. Impresia este că în acea arie de preocupări pe care mulţi cercetători o numesc „logică filosofică" nu avem o paradigmă generală, că diverse grupuri, comunităţi ştiinţifice lucrează fără a avea strânse legături între ele, ba uneori chiar ignorându-se reciproc.

Să luăm, de pildă, pe de o parte cărţi precum *Philosophical Logic* de Sybil Wolfram, Routledge, London, 1990, sau *An Introduction to Philosophical Logic* de A.C. Grayling, Duckworth, London, 1990 şi, pe de altă parte, monumentalul *Handbook of Philosophical Logic*, editat de D. Gabbay şi F. Guenther în patru volume, la D. Reidel, Dordrecht, 1984–1986. Primul volum al tratatului editat de Gabbay şi Guenther cuprinde o introducere în metateoria logicii standard (a propoziţiilor şi a predicatelor), semantici alternative şi o prezentare a unor logici de nivel superior. Acelaşi stil este păstrat şi în volumele următoare: al doilea, dedicat extinderilor logicii standard (de pildă, logici modale, temporale, denotice); al treilea, dedicat alternativelor la logica standard (logica parţială, polivalentă, a relevanţei, intuiţionistă, liberă, cuantică); al patrulea, care utilizează tehnicile formale construite pentru a aborda diverse probleme de filosofia limbajului (cuantificarea, proprietăţile, indexicalitatea, presupoziţiile, atitudinile propoziţionale etc.). În întreg tratatul, gradul de tehnicitate este foarte ridicat; iar într-o lucrare introductivă precum aceasta pe care cititorul o are acum la dispoziţie nu am putut aproape deloc să apelez la materialul cuprins în tratat (cu excepţia unor remarci privind tratarea descripţiilor şi a existenţei). La un pol opus se află lucrările lui Wolfram şi Grayling. Aproape că nu găsim nici o formulă în aceste cărţi. Conceptul de logică filosofică utilizat pare mai degrabă acela de analiză logică a unor chestiuni filosofice precum problema existenţei şi a descripţiilor, ideea de adevăr, problematica necesităţii, analiticităţii şi esenţialismului, ideile de propoziţie şi de judecată. Atari chestiuni sunt foarte apropiate de filosofia logicii, şi nu e de mirare că în multe lucrări nu se face o distincţie clară între filosofia logicii şi logica filosofică. În aceeaşi direcţie pe care o ilustrează aceste două cărţi, a se vedea şi S. Blackburn, *Philosophical Logic*, Milton Keynes, Open University Press, 1980, P.F. Strawson (ed.), *Philosophical Logic*, Oxford, 1967, W. Quine, *Philosophy of Logic*, Prentice Hall, 1970 etc.

O lucrare care încearcă să menţină un echilibru între cele două orientări e cea publică în două volume de un grup de cercetători olandezi sub pseudonimul L.T.H. Gamut cu titlul *Logic, Language and Meaning*, University of Chicago Press, Chicago, 1991, al cărei prim volum l-am folosit de altfel în prezentarea unor teme în capitolul IV.

Pentru metateoria logicii propoziţiilor au urmat îndeaproape prezentarea făcută de C. C. Chang şi H. J. Keisler în *Model Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1973; aceeaşi lucrare a constituit baza prezentării metateoriei logicii predicatelor în capitolul III. Pentru diverse proprietăţi ale aritmeticii lui Peano (de pildă, modelele ei nonstandard) se poate consulta G. Boolos, R.C. Jeffrey, *Computability and Logic*, Cambridge University Press, 1974, iar pentru logica infinitară, logica de ordinul doi G. Takeuti, *Proof Theory*, North-Holland Amsterdam, 1975. Mai dificil, dar foarte instructiv prin bogăţia informaţiei conţinute este tratatul editat de J. Barwise, *Handbook of Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam, 1977 (ediţia rusă, în patru volume, publicată la Moscova de Editura Nauka în 1982–1983 cuprinde noi dezvoltări ale temelor abordate).

Pentru capitolul IV, în afara lucrărilor deja menţionate, foarte folositoare sunt W. Quine, *Methods of Logic*, London, 1952, W. Kneale şi M. Kneale, *Dezvoltarea logicii*, vol. II, Editura Dacia, Cluj, 1974, ca şi tratatul *Silogistica. Teoria clasică şi interpretările moderne*, de I. Didilescu şi P. Botezatu, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1978.

Cel ce se apleacă asupra listelor de lucrări citate în cărţile de „logică filosofică" întâlneşte însă din plin cărţi şi articole de logică matematică, pe de o parte, şi cărţi şi articole de filosofia limbajului, morală ori a minţii, pe de altă parte. Cititorul are, desigur, libertatea să decidă înspre ce direcţie îşi va purta paşii.